د کابل پوهنتون دطبيعي علومو علمي ـــ څېړنيزه مجله
مجـــله علـــمی- تحقیقی علـــوم طبیعی پوهنتون کابل
Journal of Natural Sciences – Kabul University
e-ISSN:3078-6665 P-ISSN:3078-5561

بررسی حل معادلات دیفرانسیل برنولی با استفاده از روش عددی ترکیبی

پوهنمل سیدعبدالبشیر عثمانی

دیپارتمنت الجبر، پوهنځی ریاضیات، پوهنتون کابل، کابل، افغانستان
ایمیل: bashirosmani868@gmail.com

چکیده

حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از روش‌های تحلیلی و عددی، یکی از مسائل مهم در ریاضیات تطبیقی می‌باشد. اکثر محققان برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول از روش‌های عددی؛ مانند روش سلسله‌ی تایلور، روش رانگ -کوتا، روش اویلر و بعضی روش‌های دیگر استفاده می‌کنند. برخی از محققان این نوع معادلات را با استفاده از روش انترپولیشن نیوتن و برخی با ترکیب روش انترپولیشن نیوتن و روش لاگرانژ مورد مطالعه و بررسی قرار داده اند. در این مقاله از روش ترکیبی که متشکل از روش انترپولیشن نیوتن و روش ایتکن می‌باشد، برای حل معادلات دیفرانسیل برنولی استفاده شده و کارایی این روش با ارائه و حل چند مثال مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: روش انترپولیشن لاگرانژ؛ روش انترپولیشن نیوتنغ روش ایتکن؛ روش ترکیبی؛ روش‌های عددی؛ معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

A Study on the Solution of Bernoulli Differential Equations Using a Hybrid Numerical Method

Sayed Abdul Bashir Osmani

Department of Algebra, Faculty of Mathematics, Kabul University, Kabul, Afghanistan
Email: bashirosmani868@gmail.com

Abstract

The solution of differential equations, whether through analytical or numerical approaches, remains a fundamental problem in applied mathematics. Various numerical methods, including Euler’s method, the Runge-Kutta method, and Taylor series, have been widely used to solve first-order ordinary differential equations. Some researchers have explored these equations using Newton’s interpolation method, while others have combined Newton’s method with Lagrange’s interpolation technique. This study introduces a hybrid approach that integrates Newton’s interpolation method with Aitken’s method to solve Bernoulli differential equations. The efficiency and accuracy of this hybrid method are analyzed through a series of examples, demonstrating its effectiveness compared to conventional numerical techniques.

Keywords: Aitken Method; First Order Differential Equations; Hybrid Method; Lagrange Interpolation Method; Newton Interpolation Method; Numerical Methods

ارجاع: عثمانی، ع. (۱۴۰۳). بررسی حل معادلات دیفرانسیل برنولی با استفاده از روش عددی ترکیبی. *مجله علمی-تحقیقی علوم طبیعی پوهنتون کابل، ۷(٤)، ۱۸۳-۲۰۷.* https://doi.org/10.62810/jns.v7i4

مقدمه

در ریاضیات بسیاری از مسائل به ویژه معادلات دیفرانسیل برنولی (Taylor, 2021) مرتبه اول را می‌توان برای تشکیل معادله‌ی دیفرانسیل معمولی (Denis, 2020) تدوین کرد. در این مقاله معادلات دیفرانسیل برنولی را مورد بررسی قرار داده و حل می‌نمائیم. برای حل مسائل عددی از روش عددی استفاده می‌شود (Dormand, 2017). مسأله معادله‌ی دیفرانسیل (William et al., 2017; Sinthea et al., 2010)، شامل حداقل یک معادله‌ی دیفرانسیل و حداقل یک معادله‌ی اضافی است؛ طوری که یک سیستم فقط یک راه حل به نام حل تحلیلی یا حل دقیق دارد تا آن را از حل‌های عددی تقریبی که در این مقاله در نظر می‌گیریم، متمایز کند (Neamvonk, 2023) . در این مقاله با استفاده از روش انترپولیشن نیوتن و روش لاگرانژ به بررسی مسأله ریکاتی پرداخته شده است (Salisu, 2023). حل معادلات برنولی را با استفاده از روش انترپولیشن نیوتن و روش لاگرانژ مورد بررسی قرار داده می‌دهیم (DinIde, 2020). همچنان با استفاده از روش ترکیبی که مرکب از روش‌های انترپولیشن نیوتن و ایتکن می‌باشد، برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول پرداخته شده است.

در این مقاله، حل معادلات دیفرانسیل برنولی با استفاده از تکنیک ترکیبی که شامل روش انترپولیشن نیوتن و روش ایتکن می‌شود، با ارایه و حل چندین مثال مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است که نتایج عددی آن مؤثریت و کارایی این روش را در مقایسه با حل دقیق آن نشان می‌دهد.

معادله‌ی دیفرانسیل برنولی: معادله دیفرانسیل برنولی نوعی معادله دیفرانسیل غیرخطی است که شکل کلی آن به صورت زیر است: (Tunç et al., 2022; Ide, 2020)

$$y' + \mathrm{P(x)y} = Q(x)y^n \qquad (1)$$

در این معادله P(x) و Q(x) توابعی از x هستند و n عددی حقیقی است. در آن y یک تابع اشکار و قیمت‌های آن در شرایط اولیه اعداد معلوم باشد. اگر $n = 0$ یا $n = 1$ باشد، این معادله به یک معادله دیفرانسیل خطی تقلیل پیدا می‌کند؛ اما برای مقادیر دیگر n، این معادله غیر خطی است و روش خاصی برای حل آن به کار می‌رود.

روش حل معادله برنولی: برای حل معادله برنولی، ابتدا با تقسیم طرفین معادله بر y^n، معادله به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{P(x)}{y^{n-1}} = Q(x)$$

با انجام تغییر متغییر $v = y^{1-n}$ ، مشتق y به صورت زیر خواهد بود:

$$y' = (1-n)y^{-n}v'$$

با تعویض y و y′ در معادله اصلی، معادله زیر بدست میاید:

$$v' + (1-n)P(x)v = (1-n)Q(x)$$

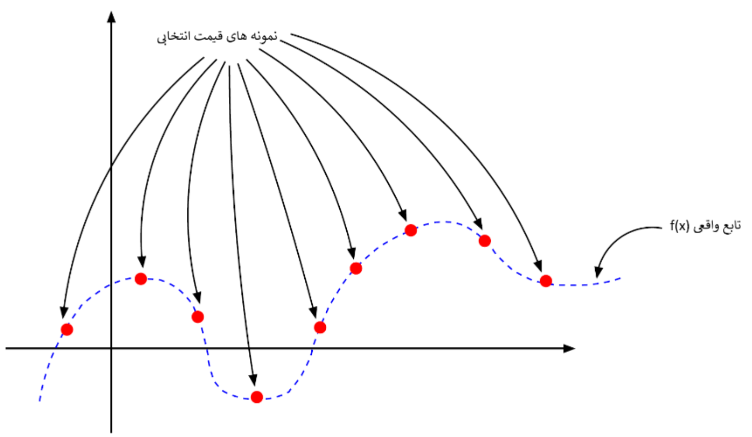
در مرحله بعد، معادله دیفرانسیل خطی به دست آمده v را حل می‌نماییم. این را می‌توان با استفاده از روش‌هایی؛ مانند یک‌پارچه‌سازی فکتورها یا ادغام مستقیم انجام داد، اگر P(x) و Q(x) توابع ساده باشند.

در اخیر $v = y^{1-n}$ را دوباره تعویض می‌نماییم تا y را بدست بیاوریم.

کاربرد معادلات دیفرانسیل برنولی: معادلات برنولی در زمینه‌های مختلف علمی؛ مانند فیزیک، مهندسی، زیست‌شناسی و غیره کاربرد دارد؛ زیرا می‌تواند رفتارهای غیرخطی متنوعی؛ مانند، رشد جمعیت یا انتقال حرارت، را مدل‌سازی کند.

تشریح روش‌ها

انترپولیشن: ما اغلب به یک تابع خاص f(x) علاقه مندیم؛ اما علی الرغم این واقعیت که f ممکن است در یک انتروال کامل قیمت‌های [a, b] تعریف شود که ما تنها قیمت دقیق آن را در نقاط انتخابی $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ می دانیم (Cuevas et al., 2024; Karpfinger, 2022).



شکل ۱: گراف تابع f(x) در نمونه‌های قیمت انتخابی

برای این‌که چرا فقط تعداد محدودی از قیمت‌ها را برای f(x) به جای کل گراف آن می‌توان داشت، ممکن است دلایل متعددی وجود داشته باشد:

- ممکن فرمول تحلیلی برای f(x) نداشته باشیم؛ زیرا نتیجه یک پروسس پیچیده است که تنها به صورت تجربی مشاهده می‌شود. طور مثال، f(x) می‌تواند با یک کمیت فیزیکی (درجه حرارت، غلظت، سرعت و غیره) مطابقت داشته باشد که در طول زمان در یک آزمایش آزمایشگاهی تغییر می‌کند. به جای فرمول صریح، از یک دستگاه اندازه‌گیری برای گرفتن قیمت‌های نمونه f در نقاط از پیش تعیین شده در زمان استفاده می‌کنیم.
- و یا ممکن برای f(x) فرمول داشته باشیم؛ اما ارزیابی این فرمول کار ساده نیست. طور مثال معادلات زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = \sin(x) \text{ یا } f(x) = \ln(x) \text{ یا } f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

ممکن ارزیابی f(x) با چنین فرمولی یک عملیه بسیار دشوار باشد و ما می‌خواهیم روش ساده را برای به دست آوردن یک قیمت تقریبی در نظر بگیریم. در واقع، در زمانی‌که کمپیوتر به اندازه امروزی قابل دسترس نبود، جدول‌های مثلثاتی بسیار محبوب بود و همواره مورد استفاده قرار می‌گرفت. به عنوان مثال جدول زیر را در نظر می‌گیریم:

جدول ۱: جدول مثلثاتی

زاویه	Sin(θ)	Cos(θ)
...	...	...
44°	0.695	0.719
45°	0.707	0.707
46°	0.719	0.695
47°	0.731	0.682
...	...	...

اگر از ما خواسته شود که قیمت تقریبی sin(44.6°) را دریابیم، طبیعی است که به جای تلاش برای نوشتن عبارت تحلیلی آن، قیمت تخمینی آن را از جدول در نظر می‌گیریم.

روش‌های انترپولیشن سعی می‌کند به سؤالات مربوط به قیمت f(x) در نقاطی غیر از مواردی که نمونه‌برداری شده اند، پاسخ دهد. یک سؤال واضح این است که بپرسیم حل تخمینی f(x*) برای قیمت x* متفاوت از هر نمونه‌یی‌که جمع‌آوری کرده ایم چیست؟ سؤالات مشابهی را می‌توان در همچنین موقفی در مورد مشتقات .. ,f′(x*), f′′(x*) پرسید.

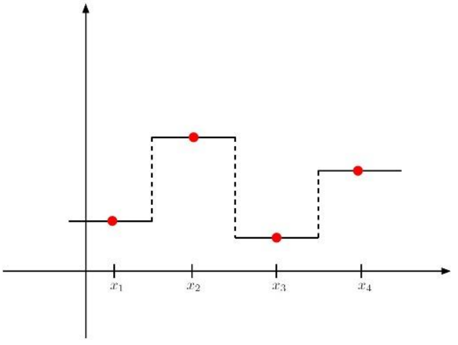
این‌که چگونه می‌توان یک تابع هموار f(x) را با تعدادی از قیمت‌های نمونه جمع‌آوری شده مطابقت دارد، بازسازی کرد. سؤال ساده‌یی نیست، به خصوص که بیش از یک راه حل برای انجام این کار

وجود داشته باشد. ابتدا، چند نماد را معرفی می‌کنیم: فرضاً $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ را برای x نقاط که در آن f نمونه‌برداری می‌شود و قیمت معلوم $f(x)$ را در $x = x_1$ به شکل $y_1 = f(x_1)$ در $x = x_2$ به شکل $y_2 = f(x_2)$ و به همین ترتیب در نقطه $x = x_n$ به شکل $y_n = f(x_n)$ نشان می‌دهد. به شکل گراف، سعی می‌کنیم تا تابع $f(x)$ را که $x \in [a, b]$ باشد. طوری بسازیم که گراف f از نقاط زیر عبور نماید:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$$

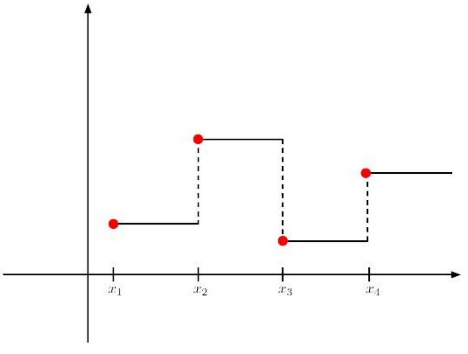
چند راه حل ممکن برای انجام این کار قرار زیر است:

- برای هر x نزدیکترین x_i به آن را انتخاب می‌کنیم و $f(x)$ را مساوی به y_i قرار می دهیم.



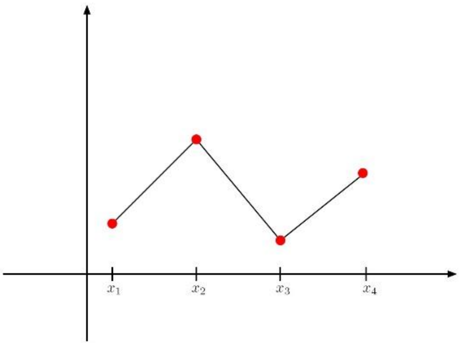
شکل ۲: گراف تابع $f(x)$ در نقاط داده شده x و y

- یا به طور ساده‌تر قیمت سمت چپ را انتخاب می‌کنیم:



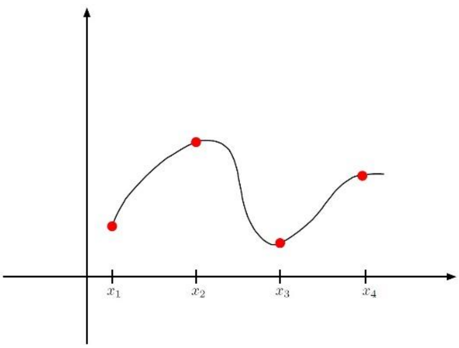
شکل ۳: گراف تابع $f(x)$ در نقاط داده شده x و y

- حالا هر آن دو نقطه همجوار را با یک خط مستقیم وصل می‌نماییم:



شکل ۴: گراف تابع f(x) در نقاط داده شده x و y

- یا سعی می‌نماییم منحنی را دریابیم که تمام نقاط را وصل نماید:



شکل ۵: گراف تابع f(x) در نقاط داده شده x و y

بحث در مورد این‌که یکی از این گزینه‌ها بهتر است، بدون داشتن دانشی از ماهیت f(x) یا هدفی که این تابع بازسازی شده برای آن استفاده خواهد شد، بی‌اهمیت نیست.

به عنوان مثال:

- به نظر خواهد رسید که تقریب ناپیوسته‌ی ایجاد شده توسط روش «انتخاب نزدیک‌ترین نمونه» نامطلوب است و مطلوب عمل نمی‌کند. با این‌حال، تابع حقیقی f(x) که نمونه‌برداری می‌شود، می‌توانست به همان اندازه نا پیوسته باشد. به طور مثال اگر f(t) مبلغ تراکنش را برای مشتری یک بانک که در زمان t انجام می‌شود، نشان دهد.
- گاهی اوقات ممکن است بدانیم که تابع f(x) حقیقی قرار است مقداری درجه همواری داشته باشد. به طور مثال، اگر f(t) موقعیت یک وسیله‌ی نقلیه در حال حرکت در شاهراه باشد، انتظار

می رود هر دو $f(t)$ و $f'(t)$ (سرعت) احتمالاً حتی $f''(t)$ (شتاب) توابع پیوسته زمان باشد. اگر به دنبال تخمین $f(t)$ در یک زمان معین باشیم، بازسازی خطی تکه‌یی را ترجیح خواهیم داد. اگر $f''(t)$ مطلوب باشد، حتی روش ساده‌تر ترجیح خواهد داده شد.

روش انترپولیشن لاگرانژ: انترپولیشن لاگرانژ یک روش جایگزین برای تعریف $p_n(x)$ بدون نیاز به حل سیستم‌های گران قیمت معادلات است. برای سِت $n + 1$ نقاط داده شده $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ پولینوم مرتبه n لاگرانژ $l_0(x), l_1(x), \dots, l_n(x)$ را چنین تعریف می‌نماییم: (Chouhan & Ray, 2021; Junjua et al., 2020; Boukhelkhal & Zeghdane, 2024; Essanhaji & Errachid, 2022; UWAEZUOKE, 2024)

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

بنابراین، انترپولیشن پولینومی آن قرار زیر است:

$$P_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \cdots + y_n l_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$$

توجه داشته باشیم که در اینجا به حل سیستم خطی نیاز نداریم. فقط باید توضیح دهیم که هر $l_i(x)$ چگونه است. از آن‌جایی که $l_i(x)$ یک پولینوم مرتبه-n با n جذر $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$ ، $x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n$ است، باید به شکل زیر باشد:

$$l_i(x) = C_i(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n) = C_i \prod_{j \neq i} (x - x_j)$$

حال اگر $l_i(x_i) = 1$ باشد چنین داریم:

$$1 = C_i \prod_{j \neq i} (x_i - x_j) \Rightarrow C_i = \frac{1}{\prod_{j \neq i}(x_i - x_j)}$$

بنابراین، برای هر i چنین داریم:

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} = \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

نوت: نتیجه فوق اساساً وجود یک پولینوم انترپولانت مرتبه-n را ثابت می‌نماید که از $n + 1$ نقطه عبور می‌کند. همچنان می‌توانیم از آن برای اثبات غیر مفرد بودن متریکس وندرموند V استفاده کنیم. اگر مفرد بود، معادله به سمت راست $y = (y_0, \dots, y_n)$ طوری وجود داشت که $V a = y$ هیچ حل نداشت که این یک تناقض است.

انترپولیشن لاگرانژ را برای محاسبه یک پولینوم انترپولیشنی در سه نقطه (0 ,1) ,(1- ,0) ,(27- ,2-) استفاده می‌نماییم.

$$P_2(x) = -27\frac{(x=0)(x-1)}{(-2-0)(-2-1)} + (-1)\frac{\big(x-(-2)\big)(x-1)}{\big(0-(-2)\big)(0-1)} + 0\,\frac{\big(x-(-2)\big)(x-0)}{\big(1-(-2)\big)(1-0)}$$
$$= -27\frac{x(x-1)}{6} + \frac{(x+2)(x-1)}{2} = -1 + 5x - 4x^2$$

حال با استفاده از معیارهای کیفیت زیر روش لاگرانژ را مورد ارزیابی قرار می‌دهیم:

- هزینه تعین $P_n(x)$ بسیار آسان است.
- اساساً قادریم یک فرمول برای $P_n(x)$ بدون حل هیچ سیستمی بنویسیم. اما اگر بخواهیم $P_n(x)$ را چنین بنویسیم: $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ ، هزینه ارزیابی a_i بسیار زیاد خواهد بود. هر $l_i(x)$ باید انکشاف داده شود که منجر به $O(n^2)$ عملیه برای هر $l_i(x)$ و در نتیجه $O(n^3)$ عملیه برای $P_n(x)$ می‌شود.
- هزینه ارزیابی $P_n(x)$ برای قیمت x اختیاری قابل توجه است.
- اگر فقط نیاز به ارزیابی $P_n(x)$ در چند نقطه انتخابی داشته باشیم، واقعاً نیازی به محاسبه a_i از قبل نداریم. برای هر $l_i(x)$ ارزیابی نیاز به n تفریق و n ضرب دارد که به معنای مجموع عملیه‌های $O(n^2)$ است (بهتر از $O(n^3)$ برای محاسبه a_i).
- در دسترس بودن مشتقات به آسانی در دسترس نیست.
- تفکیک هر $l_i(x)$ (اگر $P'_n(x) = \sum y_i l'_i(x)$) جزئی نباشد؛ عبارت فوق دارای n حد و هر یک با $n-1$ حاصل در حد است.
- انترپولیشن افزایشی سازگار نیست.

با این وجود، اگر بتوانیم محدودیت‌های آن را بپذیریم، انترپولیشن لاگرانژ یک روش با کارایی خوب است.

روش انترپولیشن نیوتن جایگزین دیگری است که هم ارزیابی مؤثر را ممکن می‌سازد و هم امکان ساخت تدریجی فراهم می‌کند. علاوه بر این هم برای ضرایت $\{a_i\}$ و هم برای مشتق $P'_n(x)$ اجازه می‌دهد تا بطور مؤثر ارزیابی شوند (Atangana & Araz, 2020; Tunç et al., 2022) .

برای سِت نقاط داده شده $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ توابع اساس نیوتن چنین است:

$$\pi_j(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{j-1}) = \prod_{k=1}^{j-1}(x-x_k) \quad j = 0, \ldots, n$$

زمانی که لیمت‌های آن به صفر تقرب می‌کند، قیمت محصول را ۱ مد نظر می‌گیریم. در اساس نیوتن، یک پولینوم داده شده شکل زیر را دارد:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \ldots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

از تعریف فوق ملاحظه می‌نماییم که $\pi_j(x_i) = 0$ برای $i < j$ است. طوری‌که متریکس A با $a_{ij} = \pi_j(x_i)$ مثلث پایین است. برای نشان دادن انترپولیشن نیوتن، از آن برای تعیین پولینوم انترپولیشنی برای سه نقطه $(1, 0)$,$(0, -1)$,$(-2, -27)$ استفاده می‌نماییم. با اساس نیوتن، سیستم خطی مثلثی پایین زیر را داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_1-x_0 & 0 \\ 1 & x_2-x_0 & (x_2-x_0)(x_2-x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

برای قیمت‌های داده شده می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

در نتیجه حل آن $a = (-27, 13, -4)$ می‌شود. بنابراین، پولینوم انترپولیشنی مساوی می‌شود به:

$$P_2(x) = -27 + 13(x+2) - 4(x+2)x = -1 + 5x - 4x^2$$

نتیجه آن همان پولینومی است که قبلاً محاسبه نمودیم.

روش ساخت تدریجی: توابع پایه نیوتن را می‌توان با در نظر گرفتن مسأله ایجاد یک درون قطبی چندجمله‌یی به صورت تدریجی به عنوان نقاط داده جدید متوالی به دست آورد. ایده اصلی قرار زیر است:

- مرحله 0: یک پولینوم $P_0(x)$ مرتبه-0 که فقط نقطه (x_0, y_0) را انترپولیت کند، تعریف می‌کنیم. واضح است که با انتخاب زیر به آن دست میابیم.

$$P_0(x) = y_0$$

- مرحله 1: یک پولینوم $P_1(x)$ مرتبه-1 که حالا نقاط (x_0, y_0) و (x_1, y_1) را انترپولیت کند، تعریف می‌کنیم. همچنان از $P_0(x)$ تعریف شده قبلی با ساخت P_1 قرار زیر، استفاده می‌نماییم:

$$P_1(x) = P_0(x) + M_1(x)$$

طوری‌که $M_1(x)$ یک پولینوم مرتبه-۱ بوده و باید رابطه زیر را صدق کند.

$$P_1(x_0) = P_0(x_0) + M_1(x_0) \Rightarrow M_1(x_0) = 0$$

(در رابطه فوق $P_0(x_0)$ و $P_1(x_0)$ مساوی به y_0 قرار داده شده است.)

بنابراین، $M_1(x) = c_1(x - x_0)$ است. c_1 را با ستفاده از رابطه زیر می‌توان مشخص کرد:

$$P_1(x_1) = P_0(x_1) + c_1(x_1 - x_0) \Rightarrow c_1 = \frac{P_1(x_1) - P_0(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - P_0(x_1)}{x_1 - x_0}$$

- مرحله 2: اکنون $P_2(x)$ را می‌سازیم که سه نقطه (x_0, y_0)، (x_1, y_1) و (x_2, y_2) انترپولیت نماید که در این صورت چنین تعریف می‌کنیم:

$$P_2(x) = P_1(x) + M_2(x)$$

طوری‌که $M_2(x)$ یک پولینوم مرتبه-۲ می‌باشد. همچنان ملاحظه می‌نماییم:

$$\left.\begin{array}{l} P_2(x_0) = P_1(x_0) + M_2(x_0) \\ P_2(x_1) = P_1(x_1) + M_2(x_1) \end{array}\right\} \Rightarrow M_2(x_0) = M_2(x_1) = 0$$

بنابراین، $M_2(x)$ باید شکل زیر را داشته باشد:

$$M_2(x) = c_2(x - x_0)(x - x_1)$$

با تعویض $x \leftarrow x_2$ عبارت زیر را برای c_2 بدست میاوریم:

$$y_2 = P_2(x_2) = P_1(x_2) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \Rightarrow c_2 = \frac{y_2 - P_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

- مرحله k: در مرحله (k-1) یک پولینوم مرتبه-(k-1) که نقاط (x_0, y_0)، ... ، (x_{k-1}, y_{k-1}) را انترپولیت می‌کند، ساختیم. حالا با استفاده از $P_{k-1}(x)$ یک پولینوم مرتبه-k $P_k(x)$ را طوری می‌سازیم که تمام نقاط (x_0, y_0)، ... ، (x_k, y_k) را انترپولیت نماید، چنین داریم:

$$P_k(x) = P_{k-1}(x) + M_k(x)$$

طوری‌که $M_k(x)$ یک پولینوم مرتبه- k می‌باشد.

حال برای هر $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ چنین داریم:

$$P_k(x_i) = P_{k-1}(x_i) + M_k(x_i) \Rightarrow M_k(x_i) = 0$$

بنابراین، پولینوم مرتبه-k، $M_k(x)$ باید شکل زیر را داشته باشد:

$$M_k(x) = c_k(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})$$

با تعویض $x \leftarrow x_k$ عبارت زیر را برای c_k بدست میاوریم:

$$y_k = P_k(x_k) = P_{k-1}(x_k) + c_k(x_k - x_0)(x_k - x_{k-1})$$
$$\Rightarrow c_k = \frac{y_k - P_{k-1}(x_k)}{\prod_{j=0}^{k-1}(x_k - x_j)}$$

هر پولینوم $M_i(x)$ به شکل زیر نوشته می‌شود:

$M_i(x) = c_i N_i(x)$ طوریکه $N_i(x) = \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j)$

بعداز n مرحله، پولینوم انترپولیشنی $P_n(x)$ چنین نوشته می‌شود:

$$P_n(x) = c_0N_0(x) + c_1N_1(x) + \dots + c_nN_n(x)$$

طوری‌که:

$$\begin{gathered} N_0(x) = 1 \\ N_1(x) = (x - x_0) \\ N_2(x) = (x - x_0)(x - x_1) \\ \vdots \\ N_k(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1}) \end{gathered}$$

این‌ها پولینوم‌های نیوتن هستند. توجه داشته باشید که x_iها مراکز نامیده می‌شود.

ما انترپولیشن تدریجی نیوتن را با ساختن انترپولانت نیوتن به صورت تدریجی با اضافه شدن نقاط داده‌ی جدید نشان می‌دهیم. با اولین نقطه داده $(x_0, y_0) = (-2, -27)$ شروع می‌کنیم که توسط پولینوم ثابت انترپولیت می‌شود.

$$P_0(x) = y_0 = -27$$

با ترکیب نقطه داده دوم $(x_1, y_1) = (0, -1)$ پولینوم قبلی را طوری تغییر می‌دهیم که نقطه داده‌ی جدید را نیز انترپولیت کند.

$$\begin{aligned} P_1(x) &= P_0(x) + M_1(x) = P_0(x) + c_1(x - x_0) \\ P_1(x) &= P_0(x) + \frac{y_1 - P_0(x)}{x_1 - x_0}(x - x_0) \\ P_1(x) &= -27 + \frac{-1 - (-27)}{0 - (-2)}\big(x - (-2)\big) \\ P_1(x) &= -27 + 13(x + 2) \end{aligned}$$

در نهایت، با ترکیب نقطه داده سوم $(x_2, y_2) = (1, 0)$ پولینوم قبلی را طوری تغییر می‌دهیم که نقطه داده جدید را نیز انترپولیت کند.

$$\begin{aligned} P_2(x) &= P_1(x) + M_2(x) = P_1(x) + c_2(x - x_0)(x - x_1) \\ P_2(x) &= P_1(x) + \frac{y_2 - P_1(x)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}(x - x_0)(x - x_1) \\ P_2(x) &= -27 + 13(x + 2) + \frac{0 - 12}{\big(1 - (-2)\big)(1 - 0)}\big(x - (-2)\big)(x - 0) \\ P_2(x) &= -27 + 13(x + 2) - 4(x + 2)x \end{aligned}$$

روش تفاضلات تقسیم شده: تا این‌جا دو روش را برای محاسبه انترپولیشن نیوتن، متریکس مثلثی و انترپولیشن تدریجی مورد مطالعه قرار دادیم. با این حال روش کارآمد و سیستماتیک دیگری نیز برای

محاسبه آن‌ها وجود دارد که بنام تفاضلات تقسیم شده یاد می‌شود. تفاضل تقسیم شده تابعی است که بر روی مجموعه‌یی از مراکز نمایه‌شده متوالی تعریف شده است.

به طور مثال:

$$x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j-1}, x_{i+j}$$

تفاضل تقسیم شده این قیمت‌ها قرار زیر نشان داده می‌شود:

$$f\left[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j-1}, x_{i+j}\right]$$

قیمت این نماد به صورت بازگشتی به صورت زیر تعریف می‌شود. برای تفاضلات تقسیم شده دارای یک آرگومان قرار زیر است:

$$f[x_i] \equiv f(x_i) = y_i$$

برای دو آرگومان قرار زیر است:

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$$

برای سه آرگومان قرار زیر است:

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

برای j+1 آرگومان قرار زیر است:

$$f\left[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j-1}, x_{i+j}\right] = \frac{f\left[x_{i+1}, \dots, x_{i+j}\right] - f\left[x_i, \dots, x_{i+j-1}\right]}{x_{i+j} - x_i}$$

واقعیتی که تفاوت‌های تقسیم شده را بسیار مفید می‌کند، این است که $f\left[x_i, \dots, x_{i+j}\right]$ را می‌توان ضریب بالاترین توان x در یک پولینومی‌نشان داد که به ترتیب زیر انترپولیت می‌نماید:

$$(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}), \dots, (x_{i+j-1}, y_{i+j-1}), (x_{i+j}, y_{i+j})$$

چرا این امر بسیار مفید است؟

به خاطر داشته باشید، پولینومی‌که به ترتیب زیر انترپولیت می‌نماید:

$$(x_0, y_0), \dots, (x_k, y_k)$$

قرار زیر است:

$$P_k(x) = P_{k-1}(x) + c_k(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})$$

بنابراین، $c_1 = f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_k]$ است. یا به عبارت دیگر،

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \vdots + f[x_0,x_1,x_2,\dots,x_n](x-x_0)\dots(x-x_{n-1})$$

بنابراین، اگر بتوانیم به سرعت تفاضلات تقسیم شده را ارزیابی کنیم، $P_n(x)$ را تعیین کرده ایم.

مثال زیر را ببینید:

$$(x_0 - y_0) = (-2,-27)$$
$$(x_1 - y_1) = (0,-1)$$
$$(x_2 - y_2) = (1,0)$$
$$f[x_0] = y_0 = -27$$
$$f[x_1] = y_1 = -1$$
$$f[x_2] = y_2 = 0$$
$$f[x_0,x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} = \frac{-1-(-27)}{0-(-2)} = 13$$
$$f[x_1,x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1} = \frac{0-(-1)}{1-0} = 1$$
$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = \frac{0-13}{1-(-2)} = -4$$

بنابراین،

$$P_2(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$
$$= -27 + 13(x+2) - 4(x+2)x$$

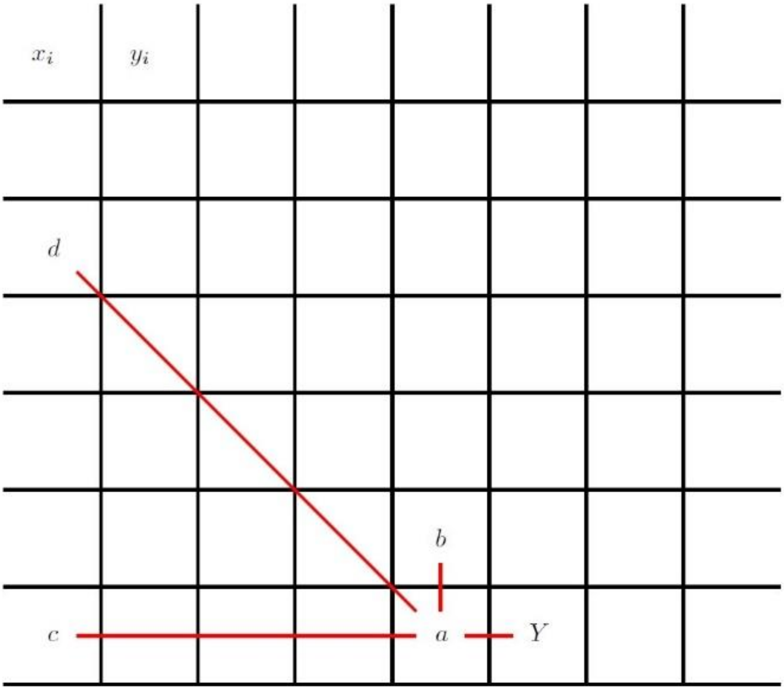
تفاضلات تقسیم شده معمولاً به شرح زیر جدول‌بندی می‌شود:

جدول ۲: تفاضلات تقسیم‌شده

	$f[\cdot]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	…
x_0	$f[x_0]$			
x_1	$f[x_1]$	$f[x_0,x_1]$		
x_2	$f[x_2]$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	
x_3	$f[x_3]$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	…
x_4	$f[x_4]$	$f[x_3,x_4]$	$f[x_2,x_3,x_4]$	…

تعریف بازگشتی را می‌توان مستقیماً بر روی جدول به صورت زیر پیاده‌سازی کرد:

$$Y = \frac{a-b}{c-d}$$



شکل ۶: تفاضلات تقسیم شده

روش ارزیابی ساده:

$$\begin{aligned} P_4(x) = c_0 & \\ &+ c_1(x-x_0) \\ &+ c_2(x-x_0)(x-x_1) \\ &+ c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ &+ c_4(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \\ &= c_0 + (x-x_0)[\,c_1 + (x-x_1)[\,c_2 + (x-x_2)[\,c_3 + (x-x_3)\,c_4\,]]] \end{aligned}$$

$$P_4(x) = Q_0(x)$$

به صورت برگشتی: $Q_n(x) = c_n$ را تعریف می‌کنیم. سپس،

$$Q_{n-1}(x) = c_{n-1} + (x - x_{n-1})Q_n(x)$$

قیمت $P_n(x) = Q_0(x)$ می‌توان (در زمان خطی) با تکرار این برگشتی n دفعه، ارزیابی کرد. همچنان چنین داریم:

$$Q_{n-1}(x) = c_{n-1} + (x - x_{n-1})Q_n(x)$$
$$\Rightarrow Q'_{n-1}(x) = Q_n(x) + (x - x_{n-1})Q'_n(x)$$

بنابراین، هنگامی‌که همه Q'_k را محاسبه نمودیم، می‌توانیم تمام مشتقات را نیز محاسبه کنیم. در نهایت $P'_n(x) = Q'_0(x)$ می‌شود.

ارزیابی روش نیوتن:

- هزینه محاسبه $P_n(x)$: $O(n^2)$؛
- هزینه ارزیابی $P_n(x)$ برای قیمت x اختیاری: $O(n)$؛
- موجود بودن مشتقات: بلی، طوری‌که در بالا ذکر گردید؛
- امکان انترپولیشن تدریجی: بلی.

روش ترکیبی انترپولیشن نیوتن و لاگرانژ: در این روش ترکیبی، ابتدا از روش انترپولیشن نیوتن برای دریافت دو عبارت دوم استفاده می‌شود. سپس از روش انترپولیشن لاگرانژ برای تشکیل معادله‌ی درجه دوم با وضع سه قیمت در y استفاده می‌شود (Khiar et al., 2024; Udoh et al., 2024; lDE, 2020; Mbagwu & Ide, 2021).

روش انترپولیشن نیوتن (Araz & Abdon, 2021; de Camargo, 2020; Tunç et al., 2022; UWAEZUOKE, 2024):

$$f_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \quad (2)$$

در این صورت؛

$$a_0 = y_0,\ a_1 = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0},\ a_2 = \frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}-\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_0} \quad (3)$$

برای تشکیل انترپولیشن درجه دوم لاگرانژ، معادله‌ی زیر را داریم:

$$y_n = \frac{(x-x_1)-(x-x_2)}{(x_0-x_1)-(x_0-x_2)}\, y_0 + \frac{(x-x_0)-(x-x_2)}{(x_1-x_0)-(x_1-x_2)}\, y_1 + \frac{(x-x_0)-(x-x_1)}{(x_2-x_0)-(x_2-x_1)}\, y_2 \quad (4)$$

روش انترپولیشن ایتکن: روش انترپولیشن ایتکن یک تکنیک عددی برای ساخت یک پولینوم انترپولیشنی است که از مجموعه‌یی از نقاط داده $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ عبور می‌کند (Tunç et al., 2022; Mbagwu & Ide, 2021). این روش به ویژه برای بهبود تدریجی تخمین‌های حاصل از انترپولیشن در یک نقطه‌ی خاص بسیار کارآمد است. روش ایتکن بر پایه محاسبات بازگشتی و تفاضل‌های تقسیم شده عمل می‌کند و نیاز به ساخت صریح پولینوم کامل را حذف می‌کند. در عوض، مستقیماً قیمت انترپولیشن در نقطه مورد نظر را محاسبه می‌کند.

در این روش از یک فرمول بازگشتی برای محاسبه قیمت انترپولیشن P(x) در نقطه x استفاده می‌شود که قرار زیر است:

$$P_{0,k}(x) = \frac{1}{x_k - x_0}\begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_k & x_k - x \end{vmatrix} \tag{5}$$

$$P_{0,1,2}(x) = \frac{1}{x_2 - x_1}\begin{vmatrix} P_{0,1}(x) & x_1 - x \\ P_{0,2}(x) & x_2 - x \end{vmatrix} \tag{6}$$

$$y_n = P_{0,1,2,\dots,n}(x) = \frac{1}{x_n - x_{n-1}}\begin{vmatrix} P_{0,1,\dots,(n-1)}(x) & x_{n-1} - x \\ P_{0,1,\dots,(n-2)}(x) & x_n - x \end{vmatrix} \tag{7}$$

کاربرد روش ایتکن: این روش در مهندسی و علوم محاسباتی برای وظایف انترپولیشن در زمان واقعی، به ویژه زمانی که نقاط داده به صورت تدریجی به روز می‌شوند یا انترپولیشنی که تنها در یک مکان خاص مورد نیاز است، کاربرد دارد.

بررسی روش ترکیبی

در این بخش، مؤثریت روش فعلی را با ارایه مثال ها مورد بررسی و تحلیل قرار داده و نتایج آن را در جدول‌های جداگانه نشان می‌دهیم.

مثال ۱: معادله‌ی $y' = y + x \cdot y^{1/2}$ را در نظر می‌گیریم. حل دقیق این مسأله عبارت است از:

$$y = (c \cdot e^{x/2} - x - 2)^2$$

برای قیمت $c = 1$ حل دقیق این مسأله عبارت است از:

$$y = (e^{x/2} - x - 2)^2$$

بنابراین، $y(0) = 1$ می‌شود.

حال، با در نظر گرفتن $h = 0.01$ و با استفاده از انترپولیشن نیوتن، چنین داریم:

$$a_0 = 1 = y_0$$

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{0,1} = 0$$

$$y_1 = 1 + 0(0.01 - 0) = 1$$

$$a_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{\left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{0.01,0.01} - \left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{0,0}}{0.02 - 0} = 0.55$$

$$y_2 = 1 + 0(0.02 - 0) + 0.55(0.02 - 0)(0.02 - 0.01) = 1.000110000$$

حال با استفاده از روش ایتکن معادله‌ی خطی و معادله‌ی درجه دوم را تشکیل می‌دهیم:

$$P_{0,1}(x) = 1$$
$$P_{0,2}(x) = 0.0055x + 1$$
$$P_{0,1,2}(x) = 0.55x^2 - 0.0055x + 1$$

بنابراین، با استفاده از روش ایتکن می‌توان حل تقریبی معادله‌ی خطی و معادله‌ی درجه دوم را بدست آورد.

اگر حل معادله‌ی درجه دوم را با روش ایتکن در نظر بگیریم، جدول 3 حل تقریبی مثال 1 را با استفاده از روش‌های انترپولیشن نیوتن و ایتکن و حل دقیق آن با خطاهای زیر نشان می‌دهد:

$$x = 0, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09, 0.1$$

جدول ۳: حل معادله‌ی $y' = y + x \cdot y^{1/2}$ ، $y(0) = 1$

قیمت x	روش‌های انترپولیشن نیوتن و ایتکن	حل دقیق	خطای مطلق
0	1	1	0
0.01	1	1.009999833	0.009999833
0.02	1.000110000	1.019998665	0.019888665
0.03	1.000330000	1.029995492	0,029665492
0.04	1.000660000	1.039989307	0.039329307
0.05	1.001100000	1.049979102	0.048879102
0.06	1.001650000	1.059963867	0.058313867
0.07	1.002310000	1.069942587	0.067632587
0.08	1.003080000	1.089877829	0.076834247
0.09	1.003960000	1.090000000	0.086040000
0.1	1.004950000	1.100000000	0.095050000

مثال 2: اگر معادله‌ی $y' = 2xy + 2x^3y^2$ را در نظر بگیریم، حل دقیق این مسأله عبارت است از:

$$y = \frac{1}{c \cdot e^{-x^2} + 1 - x^2}$$

برای قیمت $c = 0$ حل دقیق این مسأله عبارت است از:

$$y = \frac{1}{1 - x^2}$$

بنابراین، $y(0) = 1$ می‌شود.

حال، با در نظر گرفتن $h = 0.01$ و با استفاده از انترپولیشن نیوتن، چنین داریم:

$$a_0 = 1 = y_0$$

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{0,1} = 0$$

$$y_1 = 1 + 0(0.01 - 0) = 1$$

$$a_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = 0.01000001$$

$$y_2 = 1.000002$$

حال با استفاده از روش ایتکن معادله‌ی خطی و معادله‌ی درجه دوم را تشکیل می‌دهیم:

$$P_{0,1}(x) = 1$$

$$P_{0,2}(x) = 0.0001x + 1$$

$$P_{0,1,2}(x) = 0.01x^2 - 0.0001x + 1$$

بنابراین، با استفاده از روش ایتکن در صورتی می‌توان حل تقریبی معادله‌ی خطی و معادله‌ی درجه دوم را بدست آورد اگر معادله‌ی درجه دوم را با روش ایتکن در نظر بگیریم.

جدول 4 حل تقریبی مثال 2 را با استفاده از روش‌های انترپولیشن نیوتن و ایتکن و حل دقیق آن با خطاهای زیر نشان می‌دهد:

$$x = 0, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09, 0.1$$

جدول ۴: حل معادله‌ی $y' = 2xy + 2x^3y^2$ ، $y(0) = 1$

قیمت x	روش‌های انترپولیشن نیوتن و ایتکن	حل دقیق	خطای مطلق
0	1	1	0
0.01	1.000009000	1.000100010	0.000099110
0.02	1.000002000	1.000400610	0.000381600
0.03	1.000006000	1.000900811	0.000394160
0.04	1.000012000	1.001602564	0.001390364
0.05	1.002495000	1.002506266	0.002566760
0.06	1.000093000	1.003613007	0.003583007
0.07	1.000042000	1.004924128	0.004882128
0.08	1.000056000	1.006441224	0.006385224
0.09	1.000072000	1.008166146	0.008094146
0.1	1.000090000	1.010101010	0.010011010

مثال 3: اگر معادله‌ی $y' = x^3y^3 - xy$ را در نظر بگیریم، حل دقیق این مسأله عبارت است از:

$$y = \frac{1}{c \cdot e^{x^2} + 1 + x^2}$$

برای قیمت $c = 0$ حل دقیق این مسأله عبارت است از:

$$y = \frac{1}{1+x^2}$$

بنابراین، $y(0) = 1$ می‌شود.

حال، با در نظر گرفتن $h = 0.01$ و با استفاده از انترپولیشن نیوتن، چنین داریم:

$$a_0 = 1 = y_0$$
$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{0,1} = 0$$
$$y_1 = 1 + 0(0.01 - 0) = 1$$
$$a_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = 0.005$$
$$y_2 = 0.999999$$

حال با استفاده از روش ایتکن معادله‌ی خطی و معادله‌ی درجه دوم را تشکیل می‌دهیم:

$$P_{0,1}(x) = 1$$
$$P_{0,2}(x) = -0.00005x + 1$$
$$P_{0,1,2}(x) = -0.005x^2 + 0.00005x + 1$$

بنابراین، با استفاده از روش ایتکن در صورتی می‌توان حل تقریبی معادله‌ی خطی و معادله‌ی درجه دوم را بدست آورد که اگر معادله‌ی درجه دوم را با روش ایتکن در نظر بگیریم.

جدول 5 حل تقریبی مثال 3 را با استفاده از روش‌های انترپولیشن نیوتن و ایتکن و حل دقیق آن با خطاهای زیر نشان می‌دهد:

$$x = 0, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09, 0.1$$

جدول ۵: حل معادله‌ی $y' = x^3y^3 - xy$ ، $y(0) = 1$

قیمت x	روش‌های انترپولیشن نیوتن و ایتکن	حل دقیق	خطای مطلق
0	1	1	0
0.01	0	0.999900010	0.000099990
0.02	0.999999000	0.999600160	0.000398840
0.03	0.999997000	0.999100809	0.000896191
0.04	0.999994000	0.998402556	0.001591444
0.05	0.999990000	0.997506234	0.002483766
0.06	0.999985000	0.996412914	0.003572086
0.07	0.999979000	0.995123893	0.004855107

0.004855107	0.993640700	0.999972000	0.08
0.007998917	0.991965083	0.999964000	0.09
0.009851490	0.990099010	0.999950500	0.1

بحث و مناقشه

در این بخش نتایج بدست آمده از روش ترکیبی انترپولیشن نیوتن و ایتکن برای حل معادلات دیفرانسیل برنولی بررسی و با روش های عددی موجود و حل دقیق مقایسه شده است. تحلیل ها بر اساس سه مثال مشخص صورت گرفته که هر کدام از جنبه های مختلف عملکرد این روش را نشان می‌دهند.

دقت و صحت نتایج: نتایج جدول های ۳، ۴ و ۵ مقاله نشان می دهد که روش ترکیبی قادر است با دقت قابل توجهی، جواب های تقریبی معادلات دیفرانسیل برنولی را محاسبه کند. خطای مطلق بین جواب های بد ست آمده و حل دقیق برای مقادیر مختلف x محا سبه شده است. در تمامی مثال‌ها، روش ترکیبی خطای کمتری نسبت به روش‌های سنتی از خود نشان داده است. به ویژه در مقادیر کوچک‌تر x، اختلاف بین حل دقیق و روش ترکیبی بسیار ناچیز بوده و نشان دهنده‌ی دقت بالای این روش است.

کارایی محاسباتی: روش ترکیبی نه تنها از نظر دقت عملکرد بهتری داشته، بلکه از نظر سرعت محاسبات نیز برتری دارد. ساختار بازگشتی روش ایتکن و استفاده از تفاضلات تقسیم شده در انترپولیشن نیوتن باعث شده که فرآیند محاسبات با هزینه زمانی کمتری انجام شود. به ویژه در مثال هایی که تعداد نقاط داده افزایش یافته، این روش به‌طور کارآمد تری نسبت به روش های دیگر عمل می کند.

پایداری و همگرایی: در فرآیند حل مثال‌ها، روش ترکیبی پایداری خوبی از خود نشان داده و در تمامی مرحله های محاسباتی به همگرایی مطلوب رسیده است. به ویژه در مثال های ۲ و ۳ که شامل معادلات غیرخطی پیچیده تر هستند، این روش بدون ایجاد نوسانات یا رفتار های غیر منتظره، به جواب های دقیق نزدیک شده است. این ویژگی نشان‌دهنده‌ی پایداری روش در مواجهه با مسائل غیرخطی است.

مقایسه با روش‌های دیگر: مقایسه روش ترکیبی با روش های سنتی مانند رانگ-کوتا و روش اویلر نشان داد که روش ترکیبی از نظر دقت و سرعت عملکرد بهتری دارد. همچنین در مقایسه با انترپولیشن نیوتن یا ایتکن به صورت مجزا، ترکیب این دو روش باعث بهبود قابل توجه دقت و کاهش خطا شده

است. این موضوع تأیید می‌کند که استفاده از یک روش ترکیبی می‌تواند نتایج بهتری را نسبت به استفاده از هر روش به تنهایی ارائه دهد.

نتیجه‌گیری

در این مقاله حل معادلات دیفرانسیل برنولی غیر خطی مرتبه اول با استفاده از روش ترکیبی که متشکل از روش‌های انترپولیشن نیوتن و ایتکن می‌باشد، مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است. تمرکز اصلی ما در این مقاله، ارزیابی دقت و کارایی این روش ترکیبی در مقایسه با سایر روش های عددی موجود و حل دقیق معادلات می باشد. بر اساس تحلیل های انجام شده و مثال های ارائه شده در این مقاله، نتایج نشان می دهد که روش ترکیبی نه تنها دقت بالایی دارد، بلکه می تواند با خطای کمتر و سرعت محاسباتی بهتر نسبت به روش‌های سنتی، نتایج قابل اعتمادی ارائه دهد. برای بررسی دقیق تر، سه مثال مجزا در این مقاله مورد مطالعه قرار گرفته است که هر کدام از این مثال ها نشان می دهد که روش ترکیبی قادر است به طور مؤثر جواب های معادلات را با دقت بالا تقریب بزند. از مقایسه نتایج بدست آمده با حل دقیق معادلات که در جداول ۳، ۴ و ۵ این مقاله ارائه شده است، می‌توان نتیجه گرفت که روش ترکیبی انترپولیشن نیوتن و ایتکن، نه تنها خطای کمتری دارد بلکه در محاسبات پیچیده نیز عملکرد بهتری از خود نشان می‌دهد. به ویژه در مثال هایی که شامل معادلات غیرخطی هستند، این روش می تواند به صورت پایدار و قابل اعتماد نتایج دقیقی تولید کند. علاوه بر دقت بالا، مزیت دیگر این روش، انعطاف‌پذیری آن است که امکان حل معادلات در شرایط مختلف و با داده های مختلف را فراهم می‌سازد. همچنین، روش ترکیبی به دلیل ساختار بازگشتی خود، قابلیت به روزرسانی سریع و حل تدریجی را دارد که برای کاربرد های عملی در زمینه های مهندسی، فیزیک و سایر علوم کاربردی، بسیار مفید است.

در نهایت، می‌توان نتیجه گرفت که استفاده از این روش ترکیبی برای حل معادلات دیفرانسیل برنولی نه تنها یک رویکرد کارآمد و دقیق است، بلکه می‌تواند به عنوان جایگزینی مناسب برای روش‌های سنتی در مسائل عددی پیچیده به کار رود. پیشنهاد می‌شود که در پژوهش‌های آینده، کارایی این روش برای معادلات دیفرانسیل با مرتبه‌های بالاتر و سیستم‌های چندمعادله‌ای نیز مورد بررسی قرار گیرد.

محدودیت ها و پیشنهادات

هرچند روش ترکیبی نتایج خوبی ارائه داده است، اما برخی محدودیت ها نیز وجود دارد. این روش برای معادلات مرتبه اول برنولی به خوبی عمل کرده، اما کارایی آن برای معادلات دیفرانسیل مرتبه

بالاتر و سیستم های چندمعادله‌ای نیازمند بررسی بیشتر است. همچنین، تأثیر این روش در حل مسائل با شرایط مرزی پیچیده تر و معادلات با ضرایب متغیر نیز می‌تواند مو ضوعی برای پژوهش های آینده باشد.

منابع

Aldin, N. (2020). Comparison of Newton's Interpolation and Aitken's Method with Runge-Kutta Method for Solving First Order Differential Equation. *Middle-East Journal of Scientific Research, 28*(5), 391-394. doi:10.5829/idosi.mejsr.2020.391.394

Araz, S., & Abdon, A. (2021). *New Numerical Scheme with Newton Polynomial: Theory, Methods, and Applications.* Academic Press.

Atangana, A., & Araz, S. (2020). New numerical method for ordinary differential equations: Newton polynomial. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 372*, 112622. doi:https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.112622

Boukhelkhal, I., & Zeghdane, R. (2024). Lagrange interpolation polynomials for solving nonlinear stochastic integral equations. *Numerical Algorithms, 96*(2), 583-618. doi:10.1007/s11075-023-01659-x

Chouhan, V., & Ray, S. (2021). Approximation using Lagrange and Hermite Form of Polynomial Interpolation: An Experimental Study. *2021 International Conference on Advances in Electrical, Computing, Communication and Sustainable Technologies (ICAECT)* (S. 1-6). Bhilai, India: IEEE. doi:10.1109/ICAECT49130.2021.9392472

Cuevas et al. (2024). Interpolation and Polynomials. In *Computational Methods with MATLAB®* (S. 77-101). Springer Nature Switzerland. doi:10.1007/978-3-031-40478-8_4

de Camargo, A. (2020). On the numerical stability of Newton’s formula for Lagrange interpolation. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 365*, 112369. doi:https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.112369

Denis, B. (Dec 2020). An Overview of Numerical and Analytical Methods for solving Ordinary Differential Equations. doi:10.13140/RG.2.2.11758.64329

DinIde, N. (2020). Numerical study for Solving Bernoulli Differential Equations by using Runge-Kutta Method and “Newton's Interpolation and Aitken's Method". *International Journal of Scientific and*

Innovative Mathematical Research(IJSIMR), 8(5), 9-13. doi:https://doi.org/10.20431/2347-3142.0805002

Dormand, J. (2017). *Numerical Methods for Differential Equations: A Computational Approach* (1st Ausg.). Boca Raton. doi:https://doi.org/10.1201/9781351075107

Essanhaji, A., & Errachid, M. (2022). Lagrange Multivariate Polynomial Interpolation: A Random Algorithmic Approach. *Journal of Applied Mathematics, 2022*(1), 8227086. doi:10.1155/2022/8227086

Ide, N. A. (2020). Using Newton's Interpolation and Aitken's Method for Solving First Order Differential Equation. *World Applied Sciences Journal*, *38*(3), 191-194.

Junjua et al. (2020). CONSTRUCTION OF OPTIMAL DERIVATIVE FREE ITERATIVE METHODS FOR NONLINEAR EQUATIONS USING LAGRANGE INTERPOLATION. *Journal of Prime Research in Mathematics, 16*(1), 30-45.

Karpfinger, C. (2022). Polynomial and Spline Interpolation. In *Calculus and Linear Algebra in Recipes: Terms, phrases and numerous examples in short learning units* (S. 311-320). Berlin: Springer Berlin Heidelberg. doi:10.1007/978-3-662-65458-3_29

Khiar et al. (2024). On the accurate computation of the Newton form of the Lagrange interpolant. *Numerical Algorithms*. doi:https://doi.org/10.1007/s11075-024-01843-7

lde, N. (2022). Modification on Euler-Cauchy Method for Solving First-order Differential Equations. *Asian Journal of Pure and Applied Mathematics, 4*(1), 56-62. Von https://jofmath.com/index.php/AJPAM/article/view/97 abgerufen

lDE, N. A. (2020). Numerical Study for Solving Quadratic Riccati Differential Equations. *Middle-East Journal of Scientific Research, 28*(4), 348-356. doi:10.5829/idosi.mejsr.2020.348.356

Lychagin, V. (2024). Semi-analytical methods for solving non-linear differential equations: A review. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *531*(1). doi:https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2023.127821

Mbagwu, J., & Ide, N. (December 2021). Comparison of Newton's Interpolation and Aitken's Methods with Some Numerical Methods for Solving

System of First and Second Order Differential Equation. *International Journal of Scientific World, 164*, 108-121.

Neamvonk, A. (2023). Solving the First Order Differential Equations using Newton's Interpolation and Lagrange Polynomial. *European Journal of Pure and Applied Mathematics, 16*(2), 965-974. doi:https://doi.org/10.29020/nybg.ejpam.v16i2.4727

Salisu, I. (2023). Application of Lagrange Interpolation Method to Solve First-Order Differential Equation Using Newton Interpolation Approach. *EURASIAN JOURNAL OF SCIENCE AND ENGINEERING, 9*(1), 89-98.

Senu et al. (2022). Numerical solution of delay differential equation using two-derivative Runge-Kutta type method with Newton interpolation. *Alexandria Engineering Journal, 61*(8), 5819-5835. doi:https://doi.org/10.1016/j.aej.2021.11.009

Sinthea et al. (Jan 2010). Numerical solution of logistic differential equations by using the Laplace decomposition method. *World Applied Sciences Journal, 8,* 1100-1105.

Taylor, M. (2021). *Introduction to Differential Equations: Second Edition* (Second Ausg.). American Mathematical Society.

Tunç et al. (2022). Solving second order ordinary differential equations by using Newton's interpolation and Aitken's methods. *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications, 13*(1), 1057–1066. doi:http://dx.doi.org/10.22075/ijnaa.2021.24027.2657

Udoh et al. (August 2024). On Newton and Lagrange Interpolation Method for first order ordinary differential equations. *World Journal of Applied Science & Technology, 15*(2). doi:10.4314/wojast.v15i2.34

UWAEZUOKE, M. (2024). Numerical Methods for Solving First Order Ordinary Differential Equations. *The International Journal of Engineering and Science (IJES), 13*(14), 58-63. doi:DOI:10.9790/1813-13045863

William et al. (2017). *Elementary Differential Equations.* John Wiley & Sons.