مجلهٔ علمی-تحقیقی حوزهٔ علوم
طبیعی پوهنتون کابل، ۱ (۳) ۱۳۹۹

محاسبهٔ انتیگرال‌ها به کمک ریزیدو

پوهندوی دکتور کریمه محبی[۲۲]
تقریظ‌دهنده: پوهاند خالقداد فیروزکوهی

چکیده

ضریب a_{-1} از $\frac{1}{(z-z_0)}$ در سلسلهٔ لورانت به‌نام ریزیدوی تابع f در نقطهٔ منفرد منزوی z_0 یاد می‌شود. برای نشان‌دادن ریزیدوی تابع f در نقطه z_0 از سمبول زیر استفاده می‌نماییم:

$$a_{-1} = \operatorname{Res}\left(f(z), z_0\right)$$

اگر قسمت اصلی سلسلهٔ لورانت که برای $0 < |z - z_0| < R$ قابل قبول باشد، دارای تعداد متناهی از حدود ضریب a_{-n} خلاف صفر باشد پس z_0 قطب مرتبهٔ n است و اگر قسمت اصلی سلسله دارای تعداد نامتناهی حدود با ضریب خلاف صفر باشد، پس z_0 نقطهٔ منفرد لازمی است.

قضیه۱: اگر f دارای قطب ساده در نقطهٔ $z = z_0$ باشد پس،

$$\operatorname{Res}\left(f(z), z_0\right) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

قضیه۲: اگر f دارای قطب مرتبهٔ n در نقطهٔ $z = z_0$ باشد، پس

$$\operatorname{Res}\left(f(z), z_0\right) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z - z_0)^n f(z)$$

قضیه۳: اگر D یک ناحیهٔ ساده پیوسته و C یک کانتور ساده بسته در داخل D باشد. اگر f در داخل و روی C بدون نقاط متناهی منفرد z_1 ، z_2 ، ... ، z_n در C باشد پس

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(f(z), z_k\right)$$

اصطلاحات کلیدی: سلسلهٔ تایلور؛ سلسلهٔ لورانت؛ نقاط منفرد؛ قطب؛ ریزیدو

---

[۲۲] استاد پوهنځی ریاضیات، پوهنتون کابل

Culculation of integrals by help of Residue

Asstt. Prof: Karima Muhibbi

Abstract

The coefficient a_{-1} of $\frac{1}{(z-z_0)}$ in the Laurent series given is called the Residue of the function f at the isolated singularity z_0. We shall use the notation

$$a_{-1} = \operatorname{Res}\left(f(z), z_0\right)$$

If the principle part of the Laurent series valid for $0 < |z - z_0| < R$ contain a finite number of terms with a_{-n} the last nonzero coefficient, then z_0 is a pole of order n. If the principle part of the series contains an infinite number of terms with nozero coefficients, then z_0 is an essential singularity.

Theorem1: If f has a simple pole at , $z = z_0$ then

$$\operatorname{Res}\left(f(z), z_0\right) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

Theorem 2: If f has a pole of order n at , $z = z_0$ then

$$\operatorname{Res}\left(f(z), z_0\right) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z - z_0)^n f(z)$$

Theorem 3: Let D *be* a simply connected domain and C a simple closed contour lying entirely within D .If a function f is analytic on and within C , except at a finite number of $z_1, z_2, \ldots, z_n$ within C , then

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(f(z), z_k\right)$$

Keywords: Taylor series; Laurent series; singularity point; Pole and Residue

ارجاع

محبی، کریمه. (۱۳۹۹). محاسبهٔ انتیگرال‌ها به کمک ریزیدو. مجلهٔ علمی- تحقیقی حوزهٔ علوم طبیعی پوهنتون کابل، شمارهٔ ۱ (۳)، صص ۲٦۳ – ۲۷۳.

مقدمه

قبل از این‌که به بیان موضوع بپردازیم، مفاهیم کلیدی را معرفی می‌نمایم. در قدم نخست سلسلۀ تایلور و لورانت را بیان می‌نمایم و بعداً به کمک سلسلۀ لورانت، ریذیدو را تعریف می‌نمایم و بالآخره با کمک قضایای ریذیدو به آن انتیگرال‌های می‌پردازیم که در ساحۀ اعداد حقیقی توسط روش‌های موجود قابل حل نیستند.

اگر f در ناحیۀ D تحلیلی و فرضاً z_0 یک نقطه در D باشد، پس f به‌شکل سلسلۀ تیلور انکشاف داده شده می‌تواند.

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$

اگر $z=z_0$ نقطه منفرد تابع f باشد، پس f به شکل سلسلۀ طاقت با مرکز z_0 انکشاف داده شده نمی‌تواند. امکان دارد تابع f در اطراف نقطۀ منفرد منزوی $z=z_0$ توسط سلسله‌ای نشان داده شود که هم‌زمان دارای توان مثبت و منفی باشد یعنی،

$$f(z)=\mathrm{L}+\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+z_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\mathrm{L}$$

رابطۀ بالا را به شکل حاصل جمع دو سلسله طور ذیل می‌نویسیم.

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{-k}(z-z_0)^{-k}+\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k \qquad (1)$$

رابطۀ (1) به‌نام سلسلۀ لورانت یاد می‌گردد [۳].

پیشنۀ موضوع

وقتی تابع مختلط f در نقطۀ z_0 دارای نقطۀ منفرد منزوی باشد پس f دارای سلسلۀ لورانت

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-z_0)^k=\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+\mathrm{L}$$

است که برای تمام z ها در نزدیک z_0 متقارب است. در این‌جا توجه بیشتر بالای ضریب a_{-1} است که در ارزیابی انتیگرال‌های منحنی بسیار مهم می‌باشد. ضریب a_{-1} از $\frac{1}{(z-z_0)}$ در سلسلۀ

لورانت به‌نام ریزیدو تابع f در نقطهٔ منفرد منزوی z_0 یاد می‌شود. برای نشان دادن ریزیدو تابع f در نقطهٔ z_0 از سمبول زیر استفاده می‌نماییم.

$$a_{-1} = \mathrm{Res}\left(f(z), z_0 \right)$$

اگر قسمت اصلی سلسلهٔ لورانت که برای $0 < |z - z_0| < R$ قابل قبول باشد، دارای تعداد متناهی از حدود ضریب a_{-n} خلاف صفر باشد، پس z_0 قطب مرتبهٔ n است و اگر قسمت اصلی سلسله دارای تعداد نامتناهی حدود با ضریب خلاف صفر باشد پس z_0 نقطه منفرد لازمی است [۲].

قضیه۱: اگر f دارای قطب ساده در نقطهٔ $z = z_0$ باشد پس

$$\mathrm{Res}\left(f(z), z_0 \right) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) \qquad (2)$$

ثبوت: چون f دارای قطب‌ساده در $z = z_0$ است. سلسلهٔ لورانت آن‌که در قرص پنچر شده $0 < |z - z_0| < R$ متقارب و به‌شکل ذیل می‌باشد.

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0) + \mathrm{L}$$

طوری‌که $a_{-1} \neq 0$. با ضرب نمودن هر دو طرف سلسله با $z - z_0$ و بعدا از لیمت گرفتن به‌دست می آوریم که:

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \to z_0} \left[a_{-1} + a_0 (z - z_0) + a_1 (z - z_0)^2 + \mathrm{L} \right]$$
$$= a_{-1} = \mathrm{Res}(f(z), z_0)$$

قضیه۲: اگر f دارای قطب مرتبه n در نقطهٔ $z = z_0$ باشد پس

$$\mathrm{Res}(f(z), z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{n-1}} (z - z_0)^n f(z) \qquad (3)$$

ثبوت: چون f دارای قطب مرتبه n در نقطه $z = z_0$ باشد پس

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \mathrm{L} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1 (z - z_0) + \mathrm{L}$$

طوری‌که $a_{-n} \neq 0$. رابطۀ بالا را ضرب $(z-z_0)^n$ نموده داریم که:

$$(z-z_0)^n f(z) = a_{-n} + \mathrm{L} + a_{-2}(z-z_0)^2 + a_{-1}(z-z_0)^{n-1} + a_0(z-z_0)^n + a_1(z-z_0)^{n+1} + \mathrm{L}$$

و بعداً از هر دو طرف مساوات $n-1$ مرتبه مشتق می‌گیریم.

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z-z_0)^n f(z) = (n-1)!a_{-1} + n!a_0(z-z_0) + \mathrm{L}$$

پس،

$$\lim_{z\to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z-z_0)^n f(z) = (n-1)!a_{-1}$$

حل معادلۀ اخیر برای a_{-1} رابطه مورد ظر را می‌دهد [۵].

وقتی f تابع نسبتی باشد، محاسبۀ ریزیدو با استفاده از قضیه ۱ و یا ۲ خسته‌کن است. به‌طور خاص اگر f به‌شکل $f(z) = g(z)/h(z)$ نوشته شده بتواند، طوری‌که g و h توابع تحلیلی در نقطۀ $z = z_0$ باشد. اگر $g(z_0) \neq 0$ و اگر تابع h یک جذر مرتبۀ یک در نقطۀ z_0 باشد. پس f دارای قطب ساده در نقطه $z = z_0$ است و

$$[۸]\ \mathrm{Res}(f(z), z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \qquad (4)$$

طرح موضوع

قضیه۳: اگر D یک ناحیۀ سادۀ پیوسته بوده و C یک منحنی سادۀ بسته در داخل D با شد. اگر تابع f در داخل و روی C بدون تعداد متناهی نقاط منفرد z_1 ، z_2 ، L ، z_n تحلیل باشد. پس

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f(z), z_k)$$

ثبوت: فرض می‌کنیم C_1 ، C_2 ، L ، C_n دوایر به ترتیب با مرکزهای z_1 ، z_2 ، L ، z_n استند. فرض کنیم که هر یک از دایره C_k دارای شعاع r_k اندازۀ کافی کوچک باشند، طوری‌که C_1 ، C_2

، C_n ، L مجزا باشند و نقاط داخلی برای منحنی سادهٔ بسته C باشد. با استفاده از فورمول $\oint_{C_k} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_k)$ می‌بینم که $\oint_C f(z)dz = 2\pi i\, a_{-1}$

و نظر به قضیهٔ انتیگرال کوشی برای نا حیه‌های چندگانه متصل داریم که

$$[۷] \oint_{C_k} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f(z), z_k)$$

به‌طور مثال؛ انتیگرال $\oint_C \tan z dz$ محاسبه می‌نماییم طوری‌که C دایره $|z| = 2$ باشد.

تابع تحت انتیگرال $f(z) = \tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$ دارای قطب ها در نقاط $\cos z = 0$ $\cos z = 0$ است. چون، تنها جذرهای حقیقی عبارت اند از $n = 0, \pm 1, \pm 2, \text{L}$ ، $z = \dfrac{(2n+1)\pi}{2}$.

چون تنها $\dfrac{\pi}{2}$ و $-\dfrac{\pi}{2}$ در داخل دایره $|z| = 2$ قرار دارد. پس،

$$\oint_C \tan z dz = 2\pi i \left[\operatorname{Res}\left(f(z), -\frac{\pi}{2} \right) + \operatorname{Res}\left(f(z), \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

با مشخص ساختن $g(z) = \sin z$ ، $h(z) = \cos z$ و $h'(z) = -\sin z$ ؛ با استفاده از (4) می‌بینیم که:

$$\operatorname{Res}\left(f(z), -\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2} \right)}{-\sin\left(-\frac{\pi}{2} \right)} = -1$$

$$\operatorname{Res}\left(f(z), \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \right)}{-\sin\left(\frac{\pi}{2} \right)} = -1$$

بنابراین،

$$\oint_C \tan z dz = 2\pi i(-1-1) = -4\pi i$$

از قضیه ریذیدو برای محاسبهٔ انتیگرال‌های حقیقی که شکل ذیل را دارا باشند استفاده نماییم.

$$\int_0^{2\pi} F(\cos\theta,\sin\theta)\,d\theta \qquad (5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \qquad (6)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\alpha x dx \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x dx \qquad (7)$$

طوری‌که F در (5) و f در (6) و (7) توابع نسبتی باشند. برای توابع نسبتی $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ در (6) و (7) فرض می‌کنیم که پولینوم های p و q دارای هیچ فکتور مشترک نباشند [۴].

در این مقاله صرف نوع اول آن یعنی انتیگرال ها به شکل $\int_0^{2\pi} F(\cos\theta,\sin\theta)\,d\theta$ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

مفکورهٔ اساسی در این‌جا تبدیل نمودن انتیگرال مثلثاتی حقیقی به شکل (2) در انتیگرال مختلط است، طوری‌که C منحنی دایره واحد $|z|=1$ با مرکز در مبدأ باشد.

با استفاده از روش پارامتریک ساختن منحنی توسط $z=e^{i\theta}$ $0\le\theta\le 2\pi$ ، نوشته کرده می‌توانیم

$$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \quad , \quad \cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad , \quad dz=ie^{i\theta}d\theta$$

چون $dz=ie^{i\theta}d\theta=izd\theta$ و $z^{-1}=\frac{1}{z}=e^{-i\theta}$ ، پس این سه کمیت باهم معادل اند.

$$\sin\theta=\frac{1}{2i}\left(z-z^{-1}\right),\ \cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+z^{-1}\right),\ d\theta=\frac{dz}{iz} \qquad (5)$$

پس،

$$\oint F\left(\frac{1}{2}\left(z+z^{-1}\right),\frac{1}{2i}\left(z-z^{-1}\right)\right)\frac{dz}{iz}$$

طوری‌که C دایرهٔ واحد $|z|=1$ باشد. به‌طور مثال انتیگرال $\int_0^{2\pi}\frac{1}{(2+\cos\theta)^2}\,d\theta$ را محاسبه می‌نماییم.

وقتی از تعویض که در (5) داده شده استفاده نماییم. انتیگرال مثلثاتی داده‌شده به انتیگرال کانتور ذیل تبدیل می‌گردد.

$$\oint_C \frac{1}{\left(2+\frac{1}{2}\left(z+z^{-1}\right)\right)^2}\frac{dz}{iz} = \oint_C \frac{1}{\left(2+\frac{z^2+1}{2z}\right)^2}\frac{dz}{iz} = \frac{4}{i}\oint_C \frac{z}{\left(z^2+4z+1\right)^2}dz$$

چون $z^2+4z+1=\left(z-z_1\right)\left(z-z_2\right)$ ، طوری‌که $z_1=-2-\sqrt{3}$ و $z_2=-2+\sqrt{3}$. چون تنها z_2 در داخل دایرهٔ واحد C است پس داریم که:

$$\oint_C \frac{z}{\left(z^2+4z+1\right)^2}dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(f(z), z_2\right)$$

برای محاسبهٔ ریذیدو اول متذکر می‌شویم که z_2 یک قطب مرتبهٔ دوم است پس با استفاده از قضیه۲ داریم که:

$$\operatorname{Res}\left(f(z), z_2\right) = \lim_{z\to z_2}\frac{d}{dz}\left(z-z_2\right)^2 f(z) = \lim_{z\to z_2}\frac{d}{dz}\frac{z}{\left(z-z_1\right)^2} = \lim_{z\to z_2}\frac{d}{dz}\frac{-z-z_1}{\left(z-z_1\right)^3} = \frac{1}{6\sqrt{3}}$$

پس

$$\frac{4}{i}\oint_C \frac{z}{\left(z^2+4z+1\right)^2}dz = \frac{4}{i}2\pi i \operatorname{Res}\left(f(z), z_1\right) = \frac{4}{i}2\pi i\frac{1}{6\sqrt{3}}$$

بالآخره

$$[۱]\quad \int_0^{2\pi}\frac{1}{\left(2+\cos\theta\right)^2}d\theta = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

حال انتیگرال حقیقی $\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^6+1}$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم؛ طوری‌که C یک نیم دایرهٔ فوقانی باشد که خط از $-R$ تا R را داشته و خلاف جهت عقربهٔ ساعت باشد.

$x^6+1=0$ ، وقتی $z=e^{\pi i/6}, e^{3\pi i/6}, e^{5\pi i/6}, e^{7\pi i/6}, e^{9\pi i/6}, e^{11\pi i/6}$ باشـــد. $e^{\pi i/6}$ ، $e^{3\pi i/6}$ و $e^{5\pi i/6}$ قطب‌های سـاده $1/x^6+1$ اسـتند که در داخل C قرار دارند. پس با اسـتفاده از قاعده هوبیتال داریم که:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^6+1}, e^{\pi i/6}\right)=\lim_{z\to e^{\pi i/6}}\left\{\left(z-e^{\pi i/6}\right)\frac{1}{z^6+1}\right\}=\lim_{z\to e^{\pi i/6}}\frac{1}{6z^5}=\frac{1}{6}e^{-5\pi i/6}$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^6+1}, e^{3\pi i/6}\right)=\lim_{z\to e^{3\pi i/6}}\left\{\left(z-e^{3\pi i/6}\right)\frac{1}{z^6+1}\right\}=\lim_{z\to e^{3\pi i/6}}\frac{1}{6z^5}=\frac{1}{6}e^{-5\pi i/2}$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^6+1}, e^{5\pi i/6}\right)=\lim_{z\to e^{5\pi i/6}}\left\{\left(z-e^{5\pi i/6}\right)\frac{1}{z^6+1}\right\}=\lim_{z\to e^{5\pi i/6}}\frac{1}{6z^5}=\frac{1}{6}e^{-25\pi i/6}$$

بنابراین،

$$\oint_C \frac{dz}{z^6+1}=2\pi i\left\{\frac{1}{6}e^{-5\pi i/6}+\frac{1}{6}e^{-5\pi i/2}+\frac{1}{6}e^{-25\pi i/6}\right\}=\frac{2\pi}{3}$$

یعنی

$$\int_{-R}^{R}\frac{dx}{x^6+1}+\int_C\frac{dz}{z^6+1}=\frac{2\pi}{3}$$

از هر دو طرف رابطهٔ بالا لیمت می‌گیریم.

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{dx}{x^6+1}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^6+1}=\frac{2\pi}{3}$$

چون $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^6+1}=2\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^6+1}$ است پس قیمت انتیکرال مورد نظر $\frac{\pi}{3}$ است [٦].

نتیجه‌گیری

بعد از بررسی ریزیدو و قضایای آن نتایج زیر به‌دست آمد:

- اگر تابع f دارای قطب ساده در نقطه $z = z_0$ باشد پس

$$\operatorname{Res}\left(f\left(z\right), z_0 \right) = \lim_{z \to z_0} \left(z - z_0 \right) f\left(z\right)$$

.

- اگر تابع f دارای قطب مرتبهٔ n در نقطهٔ $z = z_0$ باشد، پس

$$\operatorname{Res}(f(z), z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{n-1}} \left(z - z_0 \right)^n f(z)$$

- به کمک ریزیدو نه تنها انتیگرال های مختلط را می‌توان حل نمود، بلکه انتیگرال های حقیقی را نیز حل نموده می‌توانیم.
- به کمک ریزیدو انتیگرال‌های حقیقی که به‌شکل‌های $\int_0^{2\pi} F\left(\cos\theta, \sin\theta\right) d\theta$ ، $\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right) dx$ و $\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right) \cos\alpha x dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right) \sin\alpha x dx$ باشند قابل حل استند.

منابع

[1]. Dennis G. Zill, Patrick D. Shanahan. (2003). Complex Analysis with Applications. Jones and Bartlett Publishers, Inc. PP 352 - 354.

[2]. George Cain. (1999). Complex Analysis. Georgia institute of technology. PP 1 - 10.

[3]. Johnh. Mathews Russell W. Howell. (1997). Complex Analysis for mathematics and engineering. Jones and Bartlett publishers, PP 223 - 224.

[4]. Lars V. Ahlfors. Complex Analysis.Third edition. McGraw-Hill, Inc. PP 154 - 156.

[5]. Matthias Beck, Gerald Marchesi and Dennis Pixton. (2009). A first course in Complex Analysis. P 90.

[6]. Murray R Spiegel, Theory and Problems of Complex Variable, McGraw-Hill Book Company, 2001. PP 179 - 180

[7]. Shanti Narayan. Dr.P.K. Mittal. (2011). Complex variables. P 385.

[8]. Theodore W. Gamelin. (2001). Complex Analysis. Springer, p 197.