

# بررسی حرارت ناپایدار و غیرخطی یک جسم کروی که در یک مایع چسپناک با سرعت زاویه‌ی ثابت می‌چرخد

پوهندوی سیدسرور ابتکار

دیارتمت فزیک و الکترونیک، پوهنځی فزیک، پوهنتون کابل، کابل، افغانستان  
ایمیل: ebtakar.sarwar@gmail.com

## چکیده

در این مقاله هدف، ثابت ساختن چرخش ثابت یک توپ در یک مایع چسپناک با سرعت زاویه‌ی ثابت است؛ چون برای تمام سیستم‌های چرخشی که بی‌ثباتی حرارت نسبت به چسپناکی را نشان می‌دهد حایز اهمیت است. بعد از تحقیقات مروری به شکل تیوریک دریافتیم که افزایش درجه حرارت سطح جسم در مرز تماس با یک پروسه هدایت حرارتی، غیرثابت بوده و منجر به افزایش خود بخودی درجه حرارت می‌شود. در ضمن دریافتیم که این یک پروسه افزایش درجه حرارت غیرخطی است و از طرفی کاملاً واضح گردید که به دلیل حرکت توپ در یک محیط چسپناک در نتیجه اصطکاک، درجه حرارت سطح آن باید افزایش یابد، در نتیجه با استفاده از معادلات ناور-استوکس و معادله حرارت غیرثابت برای ناپایداری حرارت به راحتی می‌توان فهمید که پروسه حرارت ناپایدار به‌طور قابل توجهی غیرخطی است که سرانجام، با استنباط فورمول کلی جریان‌های مایع، نتایج آن‌ها به‌صورت گرافیکی نمایش داده می‌شود. واژه‌های کلیدی: چرخش ثابت؛ چسپناکی؛ درجه حرارت؛ سرعت زاویه‌ی؛ غیرخطی؛ مرز تماس

## Review of Nonstationary and Nonlinear Heating of a Spherical Body Rotating in a Viscous Fluid with a Constant Angular Velocity

Sayed Sarwar Ebtakar

Department of Physics and Electronics, Faculty of Physics, Kabul University, Kabul, Afghanistan  
Email: ebtakar.sarwar@gmail.com

### Abstract

This study investigates the steady rotation of a sphere in a viscous fluid with constant angular velocity, a phenomenon crucial for understanding thermal instability in rotating systems affected by viscosity. Theoretical analysis reveals that temperature increase at the sphere's surface, at the fluid-solid interface, is unstable and leads to spontaneous temperature escalation. We demonstrate that this temperature increase is a nonlinear process. Furthermore, we establish that the sphere's surface temperature should rise due to frictional effects as it moves through the dense medium. Employing the Navier-Stokes equations and the unsteady heat equation, we elucidate the significantly nonlinear nature of the unsteady heat process. Finally, we derive a general formula for fluid flows and present the results graphically.

**Keywords:** Constant Rotation; Viscosity; Temperature; Angular Velocity; Nonlinearity; Fluid-Solid Interface

ارجاع: ابتکار، س. (۱۴۰۳). بررسی حرارت ناپایدار و غیرخطی یک جسم کروی که در یک مایع چسپناک با سرعت زاویه‌ی ثابت می‌چرخد. د کابل پوهنتون د طبیعي علومو علمي- څېړنيزه مجله، ۱۴۰۳ هـ. ل، ۷ (۲)، ۷۳-۹۱.

<https://jns.edu.af/jns/article/view/49/version/49>

## مقدمه

مشکلی که اکنون مورد بحث قرار خواهد گرفت تا حدودی خودبه‌خود در پروسه تجزیه و تحلیل دقیق مسأله ارائه شده و با تخمین این که درجه حرارت در نتیجه حرکت انتقالی یک توپ در یک مایع چسپناک به وجود آمده است بحث خواهد گردید. از طرفی هم باتوجه به پیشینه موضوع به سؤالات تحقیقی (۱- وسکوزیته مایعات چگونه به تغییرات درجه حرارت وابسته است؟ ۲- این که نحوه حرکت جسم کروی در مایع چسپناک بر ناپایداری و بی‌ثباتی تعادل حرارتی چی تأثیر دارد؟) و فرضیه‌های تحقیقی (۱- احتمال دارد که در کنار ناپایداری درجه حرارت، شرایط محیطی نیز بالای خاصیت وسکوزیته مایع تأثیر داشته باشد و یا ۲- ممکن است وابستگی‌های ضریب ویسکوزیته دینامیکی نسبت به وابستگی‌های ضریب وسکوزیته سینماتیکی به درجه حرارت، متفاوت باشد)، جوابات و راه حال‌های منطقی ارائه خواهد گردید.

از معادله وسکوزیته کاملاً واضح است که به دلیل حرکت توپ در یک محیط چسپناک در نتیجه اصطکاک، درجه حرارت سطح آن افزایش می‌یابد (Stokes, 2000). جریان‌های مایع چسپناک تراکم‌ناپذیر ناپایدار به‌طور گسترده در مقالات به‌صورت تحلیلی و عددی مورد بحث قرار گرفته و در مطالعات متعدد گزارش شده است. قوه وارد شده بر یک کره در یک حرکت متقارن با محور دل‌خواه وابسته به زمان، با ادغام نتیجه ناویر-استوکس نشان داده می‌شود (Hakim, 2010).

در مورد حرارت ناپایدار و غیرخطی یک جسم کروی که در یک مایع چسپناک با سرعت زاویه‌ی ثابت می‌چرخند، تحقیقات متعددی توسط افراد و دانشمندان صورت گرفته اند که از موارد عمده‌ی آن مقایسه بین میزان چسپندگی محیط قیر و محیط آب به تابع شرایط محیطی است. در پوهنتون کوئینزلند کشور استرلیا در سال ۱۹۲۷ میلادی تجارب انجام یافت و نتیجه بدست آمده از تجارب نشان دادند که با داشتن یک درجه حرارت نورمال، ریزش یک قطره قیر می‌تواند حدود ده سال را دربر گیرد که در مقایسه با ریزش قطره‌های آب، حدود  $10^9 \times 230$  برابر بیشتر است (Haning, 2000).

در سال ۲۰۰۲ میلادی در مورد (جابجایی نانو مواد مقناطیسی با در نظر گرفتن اثر ویسکوزیته وابسته به ساحه مقناطیسی)، در پوهنخی معماری پوهنتون مادیروی کشور مکزیک، توسط *Mayda Lam - Maldonado - Yolanda G. Aranda-Jiménez* تحقیقات صورت گرفت (Гладков, 2016).

در سال ۲۰۲۳ میلادی تحقیقات تجربی تحت عنوان (غشای تهیج شده پیزوالکتریک برای ویسکوزیته مایعات و اندازه‌گیری تراکم آن) در دیپارتمنت مهندسی میخانیک پوهنتون صنعتی بابل ایران انجام یافت (Lawrece, 2012).

در سال ۲۰۰۰ میلادی در لابراتواری در مؤسسه تکنالوژی هند، در مورد (مدل‌های پیش‌بینی تراکم و ویسکوزیته بیودیزل) تحقیقات تجربی صورت گرفت (Lawrence, 1998).

همین‌طور در سال ۲۰۲۰ میلادی در مرکز تحقیقات و آموزش مواد، پوهنتون براون ایالات متحده امریکا در مورد (اثرات ویسکوزیته و درجه حرارت بر خواص عمل‌متقابل مالیکول‌های اجسام جامد) تحقیقات صورت گرفت (Franco, & Adamowski, 2010).

سانو (Chio, 2001)، از یک انبساط جانبی برای حل مشکل جریان مایع ناپایدار با عدد رینولدز پایین از یک کره زمانی که یک سرعت مستطیل ثابت به‌طور ناگهانی به کره منتقل می‌شود، استفاده کرد. ماکسی و رایلی (Lawrence, 1998) در مورد قوه‌های که روی یک کره سخت کوچک در یک جریان چسبناک غیریکنواخت عمل می‌کنند، بحث کردند. لارنس و واینام از معادلات خطی شده ناویر-استوکس برای بدست آوردن قوه‌یی که بر روی یک جسم متقارن محور دل‌خواه در حرکت اهتزازی وارد می‌شود، استفاده کردند. لارنس و واینام (Фогельсон, 2001) تحلیل کلی تری از معادلات استوکس ناپایدار برای جریان متقارن محوری از یک جسم کروی ارائه کردند. می و همکاران در وابستگی با کشش ناپایدار به فریکانس اهتزازات، اعداد مختلف رینولدز را بررسی کردند.

لووالنتی و برادی قوه‌ی هایدرودینامیکی وارد بر یک ذره کروی سخت را با حرکت دل‌خواه وابسته به زمان در یک جریان جاری وابسته به زمان برای مقادیر کوچک؛ اما محدود عدد رینولدز بر اساس سرعت لغزش ذره نسبت به جریان یک‌نواخت در محاسبه کردند (Henning, & Prange, 2000). توسط فنگ و جوزف از یک شبیه‌سازی عددی برای بررسی اعتبار روش شبه ثابت برای حل جریان‌های مایع چسبناک ناپایدار استفاده شده است. زمان حرکت یک کره در حال تبدیل و چرخش در یک مایع چسبناک وابسته به زمان را بعد از تجزیه و تحلیل مطالعه کرد.

کویمبرا و رانگل از یک اپراتور کسری-دیفرانسیل برای به دست آوردن جواب کلی معادله مومنتم ذرات برای جریان‌های ناپایدار استوکس به صورت تحلیلی استفاده کردند (Mexey, 2011). آسمولوف جریان ناشی از یک کره را که در یک جریان نیوتنی با عدد رینولدز کوچک در حال حرکت ناپایدار را مورد بحث قرار داد (Орешина, 2012).

ونکاتالاکسمی و همکاران یک روش ساده برای حل مسأله‌ی یک جریان ناپایدار استوکس دل‌خواه در حضور یک کره با شرایط بدون لغزش را مورد بحث قرار داد (Padmanabhan, 2006).

آفودناوا و رامسکریسنا از تخنیک و روش انتیگرالی سافمن برای به دست آوردن مجموع دوتایی که بر روی یک کره‌یی در حال چرخش در یک مایع چسبناک با شرایط مرزی کلاسیک بدون لغزش عمل می‌کنند، استفاده کردند.

شرایط لغزش معرفی شده توسط ناویر فرض می‌کند که قوه‌ی اصطکاک سطحی تعیین شده توسط سرعت مماسی مایع نسبت به مرز در نقطه‌یی از سطح آن، متناسب با کشش مماسی اعمال شده در آن

نقطه است. ثابت تناسب بین مایع و مرز را ضریب اصطکاک لغزشی می‌گویند که این فقط به ماهیت مایع و سطح مرز بستگی دارد (Карслаоу, 2007). در حالی که شرایط لغزش برای گازها جالب است. اخیراً مشخص شده است که این شرایط برای مایعات نیز جالب است (Гадчек, 2000).

آلبانو (Глесстон, 1999). در مورد قوه کشش اعمال شده بر کره‌یی که با سرعتی وابسته به زمان از طریق یک جریان تراکم‌ناپذیر در یک جریان غیرمتجانس ناپایدار برای لغزش دل‌خواه روی سطح کره حرکت می‌کند، اظهار نظر کرده‌اند. داتا و دیو قوه‌های تجربه شده توسط استوانه‌ها یا کره‌های دایره‌یی موازی به‌طور تصادفی و متجانس را در جریان ویسکوزیته یک‌نواخت با شرایط مرزی لغزش تحت تقریب استوکس با استفاده از تخنیک مدل ذره در سلول بررسی کردند. با این حال، این یک سؤال کاملاً منطقی و طبیعی را ایجاد می‌کند که این پروسه به کدام مقدار خاص می‌تواند برسد؟ به راحتی می‌توان فهمید که پروسه حرارت یک پروسه ناپایدار و به‌طور قابل توجهی غیر ثابت و غیرخطی است (Abu-Zahra, 2004) در واقع، اگر در طول پروسه حرکت که می‌تواند مدت زمان نسبتاً زیادی طول بکشد، درجه حرارت سطح جسم به تدریج زیاد شود، در نتیجه در اثر تماس سطح با محیط، درجه حرارت محیط در مرز تماس نیز باید افزایش یابد. دومی مستلزم یک تغییر خودکار در ویسکوزیته متوالی و بلافاصله در مجاورت سطح است (Hening, 2000) و این دقیقاً به این معنی است که پروسه اولاً غیر ثابت و ثانیاً به‌طور قابل توجهی غیرخطی خواهد بود؛ زیرا ویسکوزیته شروع به وابستگی به درجه حرارت می‌کند (Assia, 2010).

در این مقاله به مسأله محاسبه تغییر ناپایدار درجه حرارت سطح جسم کروی که به‌طور نامحدود با سرعت زاویه‌یی ثابت  $\omega$  در محیطی با ویسکوزیته دینامیکی  $\eta$  می‌چرخد (Гладков, 2009)، بحث خواهیم کرد. هم‌چنان در مورد حرکت آهسته و ناپایدار یک کره سخت با شرایط لغزش سطحی در یک جریان مایع چسبناک که یک فرمول ساده برای مومنات اعمال شده بر روی سطح کره استنباط می‌شود، بحث می‌کنیم.

### روش تحقیق

در این مقاله، کار لابراتواری و انجام تجربه به‌طور مستقیم صورت نگرفته‌اند؛ ولی به‌شکل تیوریک و از طریق حل معادلات تاحد زیادی تلاش گردید تا جمع‌آوری مطالب و روش تجزیه و تحلیل مطالب به‌صورت مناسب توضیح داده شود و وابستگی چسپناکی به میزان درجه حرارت را که در اثر حرکت جسم روی مایعی دارای ویسکوزیته با سرعت زاویه‌یی ثابت حرکت می‌کند، از منظر غلظت مایع، دینامیک جسم، درجه حرارت و برخی دیگر از پارامترهایی از قبل بدست آمده، بررسی گردد.

با در نظر داشت اصول نوشتاری یک مقاله علمی، شامل ساختن مأخذ در متون و درج صفحات استفاده شده در فهرست منابع، با حفظ اصول و قواعد مقاله‌نویسی رعایت گردیده‌اند، و مقاله علمی که تحت

عنوان (بررسی حرارت ناپایدار و غیرخطی یک جسم کروی که در یک مایع چسپناک با سرعت زاویه‌ی ثابت می‌چرخد) تحریر گردیده اند، به شکل تیوری، نتیجه و یافته‌های معادلات مطروحه را تحلیل و تجزیه نموده و نتایج کلی آن را با توجه به ناپایداری حرارت و نحوه‌ی چرخش جسم کروی روی مایع چسپناک، انعکاس داده است.

### معادلات اساسی و سکوزیتی

برای حل مسأله‌ی مطرح شده، استفاده از سیستم معادلات ناویر-استوکس (Franco, 2010)، معادله متمدادی و معادله حرارت غیرثابت آسان‌تر است (Lawrence, 2012)، چون بر اساس اثر ائتلاف در نظر گرفته می‌شود. پس داریم

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v + \nabla)v = -\frac{\nabla\rho}{\rho} + \nu\Delta v + g \quad (1)$$

$$C_p \frac{\partial T}{\partial t} = k\Delta T - \frac{\eta}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x^k} + \frac{\partial v_k}{\partial x^i} \right)^2 \quad (2)$$

این جا  $\nu$  سرعت،  $P$  فشار،  $\rho$  کثافت متمدادی،  $\nu$  ویسکوزیته سینماتیکی،  $g$  تعجیل جاذبه،  $C_p$  ظرفیت حرارتی ایزوباریک در واحد حجم جسم،  $K$  ضریب هدایت حرارتی و  $T$  درجه حرارت است (Sano, 2003). ثابت بولتزمن  $k_B$  را برابر با واحد در نظر می‌گیریم. محور عمودی چرخش توپ را به عنوان محور  $Z$  انتخاب می‌کنیم که فریکونسی زاویه‌ی  $\omega$  را نیز در امتداد آن هدایت می‌کند. قوه‌ی جاذبه به سمت پایین هدایت می‌شود.

معادله (۲) توسط یک قانون ساده به دست می‌آید (Глесстон, 1999).

$$T\dot{S} + \dot{Q}_T + \dot{Q}_\eta = 0 \quad (3)$$

اینجا  $\dot{S}$  - آنتروپی است:

$$\dot{Q}_T = \int_V \frac{k}{T} (\nabla T)^2 dV$$

و تابع ائتلاف به دلیل هدایت حرارتی را داریم که:

$$\dot{Q}_\eta = \frac{\nu}{2} \int_V \left( \frac{\partial v_i}{\partial x^k} + \frac{\partial v_k}{\partial x^i} \right)^2 dV$$

تابع فوق یک تابع ائتلافی مسلسل ویسکوزیتی است که بر اساس آن کثافت تابع ائتلاف با علامت منفی وارد سمت راست معادله (۲) شده اند.

### تجزیه و تحلیل معادلات ویسکوزیتی

باتوجه به تقارن محوری مسأله در حال حل، توزیع سرعت در نزدیکی سطح توپ را می‌توان به شکل زیر دریافت کرد.

$$\mathbf{v} = (v_r + v_\theta + v_\varphi) = (0, 0, v_\varphi(r, \theta)) dv \quad (۴)$$

باتوجه به معادله ناویر - استوکس به عنوان یک ثابت، برای طرح  $Z$  در معادله (۱)، افاده  $\frac{\partial P}{\partial Z} = \rho g$  را پیدا می‌کنیم. بنابراین، فشار برابر است با

$$P = P_0 + \rho g z \quad (۵)$$

که در آن  $P_0$  فشار اتمسفر خارجی است. از آن جایی که علاوه بر معادلات (۱)، (۲)، معادله بعدی  $\text{div } \mathbf{v} = 0$  نیز باید حاصل شود، سرعت را می‌توان به این شکل دریافت کرد

$$\mathbf{v} = \text{rot}(f(r)\omega) \quad (۶)$$

که در آن تابع  $f(r)$  باید بدست آید. برای پیش‌بینی معادله (۱) توسط رابطه (۴)، به دست می‌آوریم که:

$$(\Delta v)_\varphi = 0$$

باتوجه به رابطه (۷) نتیجه می‌شود که:

$$(\Delta(\nabla f(r) \times \omega))_\varphi = 0 \Leftrightarrow (\Delta \nabla f)_\varphi = 0 \Leftrightarrow \Delta f = C \quad (۷)$$

چون  $C$  ثابت ائتلاف است. در یک سیستم مختصات کروی، اثر ائتلاف مستقیماً از معادله (۷) و باتوجه به قسمت شعاعی عمل‌گر لاپلاسی  $\nabla = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr}$ ، این‌گونه به دست می‌آید:

$$f(r) = ar^2 + \frac{b}{r} \quad (۸)$$

در رابطه بالا  $a$  و  $b$  ثابت‌هایی هستند که باید از شرایط مرزی تعیین شوند. از آن جایی که توزیع سرعت‌ها در مجاورت کره با افاده  $v = \nabla(f(r)\omega)$  تعیین می‌شود، از شرط  $v|_{r \rightarrow \infty} = 0$  خواهیم داشت که:  $a = 0$ .

از شرایط تطبیق در مرز کره  $v|_{r=R} = (\omega \times R)$ ، بدست می‌آوریم که:

$$v|_{r=R} = (\omega \times R) = \nabla f(r) \times \omega|_{r=R} = -\frac{f}{r} \Big|_{r=R} (\omega \times R)$$

از این جا، مطابق (۸) نتیجه می‌شود که  $b = -R^3$ . بنابراین، محلول نزدیک به سطح کره برای  $r \geq R$  را می‌توان به این شکل نشان داد:

$$v = \frac{R^3}{r^3} (\omega \times R) \quad (9)$$

راه حل (۹) محاسبه کثافت تابع اثتلاف را به راحتی ممکن می سازد. در واقع، با در نظر گرفتن انتقال به یک سیستم مختصات منحنی، می توانیم بنویسیم:

$$\dot{Q}_\eta = \frac{\eta}{2} \int_V \left( \frac{\partial v_i}{\partial x^k} + \frac{\partial v_k}{\partial x^i} - 2\Gamma_{ik}^l v_s \right)^2 dV$$

این جا  $\Gamma_{ik}^l$  - نماد Crestoffel از نوع دوم است. یک محاسبه ساده با در نظر گرفتن رابطه (۴) و لوگارتیم ارائه شده، ما را به عبارت مورد نظر هدایت می کند (۳).

$$\frac{d\dot{Q}_\eta}{dV} = \frac{16\eta R^6 \omega^2}{r^6} \sin^2 \theta \quad (10)$$

که در آن  $\theta$  - زاویه آزیموتی سیستم مختصات کروی است  $0 \leq \theta \leq \pi$ . حال با تعویض رابطه (۱۰) به معادله (۲)، پیدا می کنیم:

$$C_p \frac{\partial T}{\partial t} = k\Delta T - \frac{16\eta R^6 \omega^2}{r^6} \sin^2 \theta \quad (11)$$

از آن جایی که ما به تکمیل زمانی درجه حرارت در سطح کره ملزم هستیم، عملگر لاپلاس در معادله (۱۱) را می توان به شکل تقریبی و با تفاوت بسیار محدود، با در نظر گرفتن تنها یک ناحیه تماس باریک از عرض  $\delta$  چنین نوشت:

$$\Delta T \approx - \frac{T - T_0}{\delta^2} \theta \quad (12)$$

در این جا  $T_0$  - درجه حرارت تعادلی به صورت  $r \rightarrow \infty$  است. بنابراین، معادله (۱۱) را در مجاورت سطح با در نظر گرفتن (۱۱) می توان به صورت زیر نوشت:

$$C_p \frac{dT}{dt} = -k \frac{T - T_0}{\delta^2} - 16\eta T (\omega)^2 \sin^2 \theta \quad (13)$$

از آن جایی که ما در مورد تکمیل زمانی  $T(t)$  صحبت می کنیم، معادله (۱۳) را می توان بر اساس قاعده متغیرهای زاویه ای اوسط گرفت (Mekawy, 2003).

$$\overline{(\dots)} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\dots) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

در نتیجه از رابطه (۱۳) بدست می آوریم که:

$$C_p \frac{dT}{dt} = -k \frac{T - T_0}{\delta^2} - \frac{32}{3} \eta T \omega^2 \sin^2 \theta \Leftrightarrow T_0 - T^* = \frac{32\delta^2}{3k} \eta (T^8) \omega^2 \quad (14)$$

از تحلیل رابطه بالا مشخص می‌شود که با افزایش درجه حرارت، مقدار ویسکوزیته کاهش می‌یابد. این بدان معناست که معادله (۱۴) تنها در صورتی راه حل خواهد داشت که شرط زیر برقرار باشد:

$$T_0 > \frac{32\rho\delta^2\omega^2}{3C_p k_B} \psi(P_r) \quad (15)$$

این جا  $\rho$  - کثافت مسلسل،  $P_r = \nu/\chi$  - Prandtl number (یک عدد بدون بعد است که معیاری از کارایی انتقال توسط انتشار مومنتم به انتشار حرارتی را ارائه می‌دهد) (Гаючек, 2000)، و  $\psi$  - تابعی به تقریب اول خطی است (Mekawy, 2003).

همان‌طور که مشاهده می‌شود، اگر سرعت زاویه‌ی چرخش به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد، رابطه (۱۵) به خوبی بدست می‌آید. هم‌چنین توجه داشته باشید که در بررسی رابطه (۱۵)، ثابت بولتزمن را برای انتقال خودبه‌خودی به مقیاس درجه حرارت معرفی کردیم. اگر اختلاف رابطه (۱۵) بدست آید، درجه حرارت  $T^*$  را می‌توان از حل معادله (۱۴) دریافت کرد. اگر قانون تغییر ویسکوزیته شناخته شده باشد، می‌توان وابستگی تجربی ایجاد شده را، در قالب قانون - توان انتخاب کرد (Jin-Bau, 2021).

$$\eta = \eta_0 \left(\frac{T_0}{T}\right)^\mu \quad (16)$$

این جا  $\mu$  - یک نماد شناخته شده است. معادله (۱۴) را می‌توان با تعویض کردن وابستگی واضح از رابطه (۱۶) به راحتی حل کرد. در نتیجه از معادله (۱۴) چنین بر می‌آید که:

$$x = 1 - \frac{a}{x^\mu} \quad (17)$$

این جا پارامتر بدون بعد  $x = T_0/T$  - به‌عنوان یک افاده قابل قبول معرفی شده است.

$$a = \frac{21\omega^2\delta^2\eta_0}{3k_B T_0 k} \quad (18)$$

معادله (۱۷) تنها در صورتی جواب خواهد داد که هر دو تابع در سمت چپ و راست در نقطه‌ی یک مماس داشته باشند که از شرط مساوی بودن مشتقات هر دو طرف معادله (۱۷) تعیین می‌شود.

$$x_0 = (a\mu)^{\frac{1}{1+\mu}} \quad (19)$$

بنابراین، راه حل معادله تنها در صورتی وجود دارد که شرط زیر برقرار باشد:

$$(a\mu)^{\frac{1}{1+\mu}} > 1 \quad (20)$$

اگر شرط (۲۰) برآورده نشود، حرارتی وجود ندارد. مطابق با تعریف  $x = T_0/T$ ، به راحتی می‌توان فهمید که جالب‌ترین و منطقی‌ترین مورد زمانی است که دو شرط  $\mu > 1$  و  $\alpha > 1$  وجود داشته



باشد. در این حالت، درجه حرارت ثابت و بدون تغییری که توپ در حال چرخش در واقع می تواند به آن برسد، مطابق رابطه (۱۹) خواهد بود که:

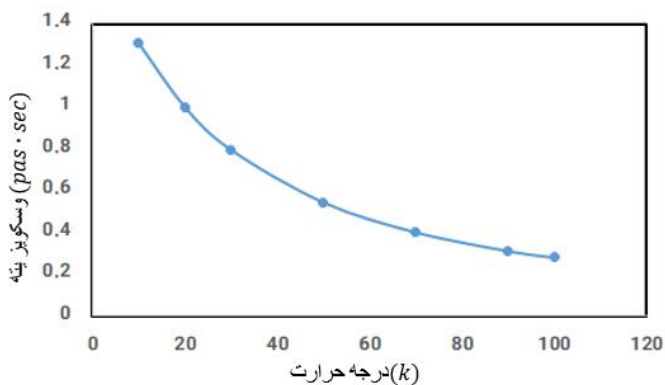
$$T^* = (a\mu)^{\frac{1}{1+\mu}} T_0 \quad (21)$$

### تخمین عددی و سکوزیته

فریکونسی چرخش  $\omega = 10^5 \text{ sec}^{-1}$ ، ویسکوزیته دینامیکی  $\eta_0 = 10^{-2} \text{ Nsec/m}^2$ ، ناحیه انتقال (یا ناحیه عمل متقابل حجم توپ با لایه ی سطحی آن که یکک ترموستات در نظر گرفته می شود)، دارای اندازه مشخصه  $\delta = 10^{-3} \text{ cm}$ ، درجه حرارت  $T_0 = 300 \text{ K}$ ، ضریب هدایت حرارتی  $k = 10^{20} (\text{cm sec})^{-1}$ ، ثابت بولتزمن  $k_B = 1.38 \cdot 10^{-16} \text{ erg /K}$  می باشد. در نتیجه به تخمین عددی زیر می رسم که:

$$a = \frac{32 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-16} \cdot 10^{-2}}{3 \cdot 1.38 \cdot 10^{-16} \cdot 300 \cdot 10^{20}} \approx 1.9 > 1 \quad (22)$$

توجه داشته باشید که اگر فریکونسی چرخش توپ کم باشد، هیچ حرارتی وجود نخواهد داشت. مقدار درجه حرارت مخصوصه مطابق رابطه (۲۱) را می توان با توجه به شکل (۱) و با دانستن قانون نمایی کاهش ویسکوزیته با افزایش درجه حرارت تخمین زد.



شکل ۱: دیاگرامی است که کاهش ویسکوزیته با افزایش درجه حرارت را نشان می دهد (Padmanabhan, 2006).  
 با توجه به توان  $\mu$ ، وابستگی های ضریب ویسکوزیته دینامیکی به درجه حرارت بسیار متنوع و رایج است که اکثراً با قوانین نمایی کاهش ویسکوزیته توصیف می شود (Padmanabhan, 2006).

$$\eta(T) = \eta_0 \exp \frac{\Delta E}{T} \quad (23)$$

این جا  $\Delta E$  - انرژی فعال سازی مالیکول های مایع است و  $\eta_0$  یک ثابت عملاً مستقل از درجه حرارت است که دارای بعد ویسکوزیته است. کاملاً واضح است که وابستگی های رابطه (۱۶) و (۲۳) در محدوده های درجه حرارت خاص از نظر کیفی بسیار مشابه هستند و بنابراین، ما به انتخاب وابستگی به قانون توان، مطابق رابطه (۱۶) تصمیم گرفتیم. همان طور که در مثال بالا پیشنهاد شد (Stokes, 2000). با برگشت به معادله (۱۴) و با توجه به معادله (۱۶) داریم که:

$$\dot{x} = -x + 1 + \frac{a}{x^\mu} \quad (24)$$

این جا علامت نقطه به معنای تفاوت با توجه به زمان بدون بعد  $\tau$  است:

$$\tau = \frac{k}{\delta^2 C_p} t \quad (25)$$

پارامتر بدون بعد معرفی شده در بالا را، می توان به راحتی به شکل کلی تری نوشت:

$$a = \frac{32\rho\delta^2\omega^2}{3T_0C_p}\psi(P_r) \quad (26)$$

این جا  $P_r = \nu/\chi$  عدد پیراندتل (عدد بدون بعد) است (Гатчек, 2000).

### زمان مشخصه حرارت

با نوشتن معادله (۲۴) نزدیک یک نقطه ثابت، داریم که:

$$\dot{x} \approx \gamma(x - x^*) + \beta(x - x^*)^2 \quad (27)$$

که در آن  $\gamma = 1 + \mu$  و  $\beta = (1 + \mu)/a^{1/(1+\mu)}$  است. بنابراین، زمان مشخصه ی که پس از آن درجه حرارت به حداکثر می رسد را می توان با استفاده از این فرمول تخمین زد:

$$\bar{t} \approx \frac{(1 + \mu)\delta^2}{\chi} \quad (28)$$

با راه حل نارملایزیشن معادله (۲۰) داریم:

$$T^* = T_0 a^{1/(1+\mu)} \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)$$

باید توجه داشته باشیم که زمان حرارتی مطابق رابطه (۲۸)، به طور قابل توجهی به تغییر درجه حرارت در ویسکوزیته بستگی دارد (Гнабаев, 2019).

### برخی از جریان های خاص

مومنت قوه ی عمل بر سطح کره سخت را می توان در حوزه تبدیل لاپلاس به این شکل به دست آورد (Севастьянов, 2013):

$$T_z = 2\pi a^3 \int_0^x t_{r\phi}|_{r=a} \sin^2\theta d\theta \quad (29)$$

این را می توان به شکل زیر ساده کرد:

$$T_z(t) = \frac{-8\pi a^3 \mu \alpha}{(\alpha + 3)} \left( \Omega(s) + \frac{as\Omega(s)}{3(s + ((\alpha + 3)/a)\sqrt{sv} + (\alpha + 3)v/a^2)} \right) \quad (30)$$

اگر  $\alpha \rightarrow \infty$  باشد، نتایج به دست آمده برای حالت بدون لغزش داده شده توسط رامسکرینسا را بررسی می کنیم (Mazur, 1998).

$$T_z(t) = \frac{-8\pi a^3 \mu \alpha}{(\alpha + 3)} \left( \Omega(s) + \frac{as\Omega(s)}{3(\alpha\sqrt{sv} + v)} \right) \quad (31)$$

با در نظر گرفتن تبدیل لاپلاس معکوس رابطه (۳۰)، به آن می رسیم که:

$$T_z(t) = \frac{-8\pi a^3 \mu \alpha}{(\alpha + 3)} + \frac{\alpha}{3} L^{-1} \left\{ \left[ \left( s\Omega(s) + \left( \alpha + \frac{(\alpha + 3)}{\alpha} \sqrt{sv} + \frac{(\alpha + 3)}{\alpha^2} \right) \right) \right]^{-1} \right\} \quad (32)$$

که در آن  $L^{-1}$  اپراتور لاپلاس معکوس را نشان می دهد.

با استفاده از قضیه حلقه (convolution) (Вопросу, 2019) همراه با تبدیل لاپلاس معکوس (Сидаров, 2008) با کمک یک پارچه سازی کانتور، می توانیم تبدیل لاپلاس معکوس در فارمول (۳۱) را به شکل زیر بدست آوریم:

$$T_z(t) = -8\pi a^3 \mu \alpha \left[ \Omega(t) + \int_0^t \left( \frac{d\Omega}{d\tau} + \Omega(0) \right) F(t - \tau) d\tau \right] \quad (33)$$

این جا داریم که:

$$F(t) = \frac{a^3}{3\pi v \sqrt{v}} + \int_0^\infty \frac{\sqrt{x} e^{-xt}}{(1 - xa^2/v(\alpha + 3))^2 + xa^2/v} dx \quad (34)$$

فارمول کلی (۳۲) را می توان برای بدست آوردن مومنتم کلی عمل کننده بر روی کره ی که در جریان مایع چسبناک استوکس با سرعت زاویه ی غیریک نواخت می چرخد، استفاده کرد. مورد عدم لغزش را می توان در حالت محدود  $\alpha \rightarrow \infty$  به شکل زیر بازیابی کرد:

$$T_z(t) = -8\pi a^3 \mu \left[ \Omega(t) + \frac{\omega a^3}{3\pi v \sqrt{v}} \int_0^t \left( \frac{d\Omega(\tau)}{d\tau} + \Omega(0) \right) \int_0^\infty \frac{\sqrt{x} e^{-xt(t-\tau)}}{(1 - \frac{xa^2}{v})} dx d\tau \right] \quad (35)$$

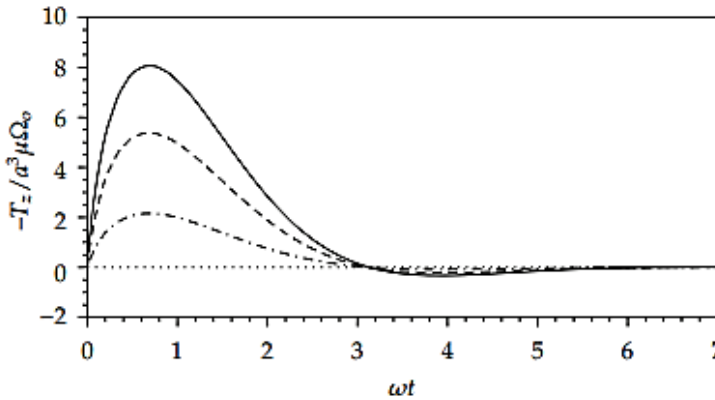
برای به دست آوردن نتیجه مومنتمی که بر روی یک کره سخت، با شعاع  $a$  که به طور پیوسته در یک مایع چسبناک با شرایط مرزی جریان لغزشی می چرخد،  $\Omega(t) = \Omega_0$  را ثابت و  $t \rightarrow \infty$  را در رابطه (۳۳) به شکل زیر قرار می دهیم:

$$T_z(t) = \frac{-8\pi a^3 \mu \alpha \Omega_0}{(\alpha + 3)} \quad (36)$$

برای برخی از جریان های مایع چسبناک غیریک نواخت استفاده می کنیم.

مورد ۱ (اهتزاز میرایی). در این جا فرض می‌کنیم که کره سخت با سرعت زاویه‌ی شروع به حرکت می‌کند:

$$\Omega(t) = \Omega_0 e^{-\omega t} \sin(\omega t) \quad (37)$$



شکل ۲: مومنت روی کره برای مورد ۱ (Франкбаев, 2016)

در این حالت، مومنتی که بر روی کره اعمال می‌شود به شکل زیر داده می‌شود:

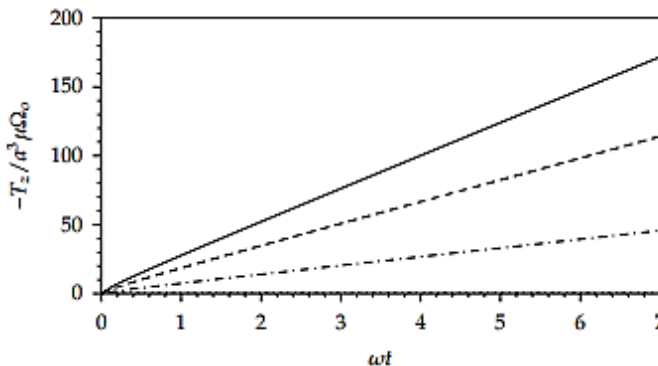
$$T_z(t) = \frac{-8\pi a^3 \mu \alpha \Omega_0}{(\alpha + 3)} \left\{ e^{-\omega t} \sin(\omega t) + \omega + \int_0^t e^{-\omega \tau} \cos((\omega t) - \sin(\omega \tau)) F(t - \tau) d\tau \right\} \quad (31)$$

که در آن  $\Omega_0$  سرعت زاویه‌ی مشخصه و  $\omega$  سرعت زاویه‌ی اهتزاز است.

مورد ۲ (سرعت شتاب). در حالت خاص دوم فرض می‌کنیم که کره با سرعت زاویه‌ی شکل زیر شروع به چرخش می‌کند:

$$\Omega(t) = \Omega_0 \{ \sin(\omega t + c) \} \quad (38)$$

که در آن  $c$  یک ثابت دلخواه است



شکل ۳: مومنت روی کره برای مورد ۲ (Сивухин, 2011)

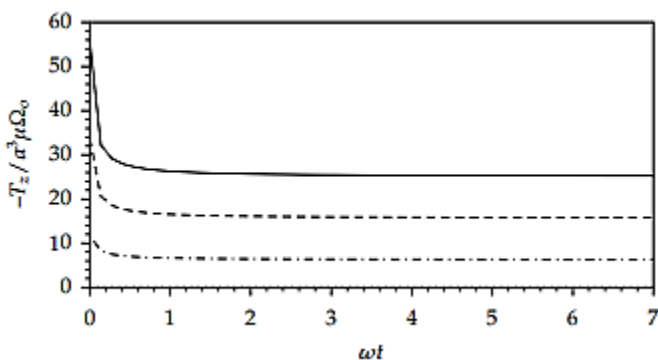
مومنټ در این حالت به شکل زیر است:

$$T_z(t) = \frac{-8\pi a^3 \mu \alpha \Omega_0}{(\alpha + 3)} \left\{ (\omega t + c) + \frac{\omega a^3}{3\pi v \sqrt{v}} \int_0^t \int_0^\infty \frac{\sqrt{x} e^{-xt}}{(1 - xa^2/v(a+3))^2 + xa^2/v} dx dt \right\} \quad (39)$$

مورد ۳ (چرخش ضربه). فرض کنید کره به صورت ضربه‌ی با سرعت زاویه‌یی می چرخد:

$$\Omega(t) = \Omega_0 H(t) \quad (40)$$

که در آن  $H(t)$  تابع *Heaviside* است، یعنی یک تابع پله‌یی است که به نام اولیور هیوساید نام‌گذاری شده است که مقدار آن برای آرگومن‌های منفی صفر و برای آرگومن‌های مثبت یک است (Вопросу, 2019).



شکل ۴: مومنټ روی کره برای مورد ۳ (Сивухин, 2011).

مومنټ کلی این‌گونه به دست می‌آید:

$$T_z(t) = \frac{-8\pi a^3 \mu \alpha \Omega_0}{(\alpha + 3)} \left\{ H(t) + \frac{\omega a^3}{3\pi v \sqrt{v}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x} e^{-xt}}{(1 - xa^2/v(a+3))^2 + xa^2/v} dx dt \right\} \quad (41)$$

#### یافته‌ها

براساس یافته‌های کیفی این مقاله نشان می‌دهد که، سیستم معادلات ناویر-استوکس (Franco, 2010)، معادله حرارت غیرثابت (Lawrence, 2012)، معادله کثافت تابع ائتلاف (Гладков, 2009) و عمل‌گر لاپلاس (Гнабвев, 2019)، در طول پروسه حرکت جسم کروی در مایع چسپناک که می‌تواند مدت زمان نسبتاً زیادی طول بکشد تا درجه حرارت سطح مایع به تدریج زیاد شود، نقش اساسی داشته و یک تغییر خودکار در ویسکوزیته به صورت پیهم و بلافاصله در مجاورت سطح جسم و سطح مایع را نشان می‌دهد و این دقیقاً به این معنی است که پروسه اولاً غیر ثابت و ثانیاً به‌طور قابل

توجهی غیرخطی خواهد بود؛ زیرا ویسکوزیته شروع به وابستگی به درجه حرارت می‌کند (Глесстон, 1999). در این مقاله مسأله محاسبه تغییر ناپایدار درجه حرارت سطح جسم کروی که به‌طور نامحدود با سرعت زاویه‌ی ثابت  $\omega$  در محیطی با ویسکوزیته دینامیکی  $\eta$  می‌چرخد مرور گردیده و به‌صورت واضح نشان داده شد که توپ با حرکت انتقالی شان در سطح مایع چسپناک در نتیجه اصطکاک، درجه حرارت سطح آن افزایش می‌یابد (Mei, 2007). برعکس اگر فریکونسی چرخش توپ کم باشد، هیچ حرارتی وجود نخواهد داشت (Карслоу, 2007).

### بحث و مناقشه

با توجه به اهداف تحقیق از معادله ویسکوزیته کاملاً واضح گردید که به دلیل حرکت توپ در یک محیط چسپناک در نتیجه اصطکاک، درجه حرارت سطح آن افزایش یافته و در عین حال جریان‌های مایع چسپناک تراکم‌ناپذیر ناپایدار به‌طور گسترده ظاهر می‌شود. با ادغام نتیجه ناویر-استوکس ما نتیجه گرفتیم که، قوه وارد شده بر یک کره در یک حرکت متقارن با محور دل‌خواه وابسته به زمان، نظر به جهت اعمال آن قابل تجزیه و تحلیل است.

به وضوح نشان داده شد که حرارت ناپایدار و غیرخطی یک جسم کروی که در یک مایع چسپناک با سرعت زاویه‌ی ثابت می‌چرخد، در مقایسه با تحقیقات قبلی (مقایسه بین میزان چسپندگی محیط قیر و محیط آب به تابع شرایط محیطی) از منظر ماهیتی دارای تقارن زیادی است. یافته‌های که بعد از مرور این عنوان از مطالعات و نتایج تجارب متعدد بدست آمد، این است که با داشتن یک درجه حرارت نورمال، ریزش یک قطره قیر می‌تواند حدود بیشتر از ده سال را در بر گیرد که در مقایسه با ریزش قطره‌های آب، حدود  $10^9 \times 231$  برابر بیشتر است. در حالی که تجاربی که در پوهنتون کوئینزلند کشور استرلیا در سال ۱۹۲۷ میلادی انجام یافت دقیقاً محدوده  $10^9 \times 230$  را نشان می‌داد. پس به راحتی می‌توان فهمید که پروسه حرارت یک پروسه ناپایدار و به‌طور قابل توجهی غیر ثابت و غیرخطی است. در واقع، اگر در طول پروسه حرکت، که می‌تواند مدت زمان نسبتاً زیادی طول بکشد، درجه حرارت سطح جسم به تدریج زیاد شود، در نتیجه در اثر تماس سطح با محیط، درجه حرارت محیط در مرز تماس نیز باید افزایش یابد. دومی مستلزم یک تغییر خودکار در ویسکوزیته متوالی و بلافاصله در مجاورت سطح است و این دقیقاً به این معنی است که پروسه اولاً غیر ثابت و ثانیاً به‌طور قابل توجهی غیرخطی خواهد بود؛ زیرا ویسکوزیته شروع به وابستگی به درجه حرارت می‌کند.

به طور خلاصه در این مقاله به مسأله محاسبه‌ی تغییر ناپایدار درجه حرارت سطح جسم کروی که به طور نامحدود با سرعت زاویه‌ی ثابت  $\omega$  در محیطی با ویسکوزیته دینامیکی  $\eta$  می‌چرخد، بحث گردید و هم‌چنان دریافت گردید که حرکت آهسته و ناپایدار یک کره سخت با شرایط لغزش سطحی در یک جریان مایع چسبناک رابطه مستقیم دارد.

### نتیجه‌گیری

بر مبنای مطالعاتی که صورت گرفته است، به‌طور خلاصه می‌توان نتیجه‌گیری کرد:

- معادله‌ی به دست آمد که رفتار ناپایدار درجه حرارت را توصیف می‌کند و میزان وابستگی ویسکوزیته به درجه حرارت غیرخطی را محاسبه می‌نماید.
  - بررسی قانون نمایی الگوریتم نشان داد که، اگر فریکوئسی چرخش توپ کم باشد، هیچ حرارتی وجود نخواهد داشت.
  - روند افزایش غیرثابت و ناپایدار درجه حرارت یک تویی در حال چرخش زاویه‌ی ثابت مورد مطالعه قرار گرفت و مقدار محدودکننده‌ی درجه حرارت به‌عنوان عامل کاهش گرمی، پیدا شد.
  - بررسی‌ها نشان داد که توپ با حرکت انتقالی شان در سطح مایع چسبناک در نتیجه اصطکاک، درجه حرارت سطح آن افزایش می‌یابد.
  - از تجزیه و تحلیل وضعیت فیزیکی مایعات مشخص شد که با افزایش درجه حرارت، مقدار ویسکوزیته کاهش می‌یابد.
  - از عملکرد دینامیکی و ترمودینامیکی توپ روی سطح مایع چسبناک به راحتی تفهیم گردید که پروسه حرارت یک پروسه ناپایدار و به‌طور قابل توجهی غیرثابت و غیرخطی است.
  - براساس اثر ائتلاف و معادلات ناویر-استوکس واضح گردید که انرژی میخانیکی توپ روی سطح مایعی دارای ویسکوزیته همیشه رو به کاهش است و به اشکال دیگر انرژی غیرمیخانیکی مانند حرارت تبدیل می‌شود.
- هم‌چنین در این مقاله، شرایط لغزش را اعمال کرده‌ایم و فارمول کلی به دست آورده‌ایم که می‌توان از آن برای ارزیابی مومنت روی کره‌یی که با سرعت زاویه‌ی غیریک‌نواخت در جریان مایع چسبناک می‌چرخد، استفاده کرد. مورد کلاسیک بدون لغزش را می‌توان به‌عنوان یک مورد خاص از کار ما در مورد محدود  $a \rightarrow \infty$  بازایی کرد. علاوه براین، قوه‌یی که بر روی کره‌یی که به‌طور متوالی در جریان مایع چسبناک حرکت می‌کند، عمل می‌کنند را می‌توان از مورد ۳ این مقاله زمانی که  $t \rightarrow \infty$  باشد به دست آورد. از شکل ۲ نتیجه می‌گیریم که مومنت یا مومنت در حالت

اهتزاز میرایی پس از مدت کوتاهی به صفر می‌رسد. همچنین، مومنت در مورد سرعت شتاب نشان داده شده در شکل ۳ به صورت خطی با زمان افزایش می‌یابد. شکل ۴ نشان می‌دهد که پس از مدت زمان بسیار کوتاهی مومنت به حالت پایدار میل می‌کند. از شکل‌های ۲، ۳ و ۴ متوجه می‌شویم که مومنت در حالت لغزش کامل، یعنی زمانی که  $a \rightarrow 0$  باشد، کاملاً صفر است. همچنین، مشاهده کردیم که مقادیر کلی با افزایش پارامتر لغزش افزایش می‌یابد.



- Abu-Zahra N. (2004). Real-time viscosity and density measurements of polymer melts using sensor fusion. *Mechatronics*, 800-803. <https://doi.org/10.1016/j.mechatronics.2003.11.001>
- Assia O., & Hakim D. (2010). Propagation of ultrasonic waves in viscous fluids. Faculty of Physics, University of Sciences and Technology Houari Boumedienne. 72-75. <https://doi.org/10.5772/6857>
- Chiu S., & Yiu H, & Pong S. (2001). Development of an in-line viscometer in an extrusion molding process. John Wiley. 919- 923. <https://doi.org/10.1016/j.polymdegradstab.2013.12.036>
- Franco, E., & Adamowski C. (2010). Ultrasonic viscosity measurement using the shear-wave reflection coefficient with a novel signal processing technique. 11-113. <https://doi.org/10.1109/TUFFC.2010.1524>
- Henning B., & Daur P., & Prange S., & Dierks K., & Hauptmann P. (2000). In-line concentration measurement in complex liquids using ultrasonic sensors. *Ultrasonics*. 799-803. [https://doi.org/10.1016/s0041-624x\(99\)00190-0](https://doi.org/10.1016/s0041-624x(99)00190-0)
- Jin O., & Bau K. (2021). Instrument for simultaneous measurement of density and viscosity. *Review of scientific instruments*. 91-93. <https://doi.org/10.1063/1.1140325>
- Lawrence, C. J., & Weinbaum, S. (1998). The force on an axisymmetric body in linearized time dependent motion, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 171, 209–218. <https://doi.org/10.1017/S0022112086001428>
- Lawrence, C. J., & Weinbaum, S. (2012). The unsteady force on a body at low Reynolds number; the axisymmetric motion of a spheroid,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 189, 463–489. <https://doi.org/10.1017/S0022112088001107>
- Lovalenti, P. M., & Brady, J. F. (2009). The hydrodynamic force on a rigid particle undergoing arbitrary time- dependent motion at small Reynolds number,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 256, 561–605. <https://doi.org/10.1017/S0022112093002885>
- Mazur, P., & Bedeaux, D. (1998). A generalization of Faxen’s theorem to nonsteady motion of a sphere through an incompressible fluid in arbitrary flow,” *Physica*, vol. 76, (2), 235–246. [https://doi.org/10.1016/0031-8914\(74\)90197-9](https://doi.org/10.1016/0031-8914(74)90197-9)
- Maxey, M. R., & Riley, J. J. (2011). Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow,” *Physics of Fluids*, vol. 26, (4), 883–889. <https://doi.org/10.4236/als.2019.74012>

- Mekawy M., & Afifi H., & El-Nagar K. (2003). Comparison between different methods for viscosity measurements. USA (NIST), 22-27. <https://doi.org/10.5755/j01.u.66.4.1022>
- Mei, R., & Lawrence, C. J., & Adrian, R. J. (2007). Unsteady drag on a sphere at finite Reynolds number with small fluctuations in the free-stream velocity,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 233, 613–631. <https://doi.org/10.1017/S0022112091000629>
- Padmanabhan, M., (2006). Measurement of extensional viscosity of viscoelastic liquids foods. *J. Food Eng.* 311. [https://doi.org/10.1016/0260-8774\(94\)00016-3](https://doi.org/10.1016/0260-8774(94)00016-3)
- Padmanyals, K., (2002) Measurement of extensional viscosity. 219-225. *TAPPI JOURNAL* <https://research.abo.fi>
- Stokes, G. G., (2000). On the theories of internal friction of fluids in motion,” *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 8, 287–305. <https://doi: 10.4236/jmp.2023.146050>
- Sano, T., (2003). Unsteady flow past a sphere at low Reynolds number,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 112, 433–441. <https://doi.org/10.1017/S002211209400279X>
- Venkatalaxmi, A., & Padmavathi, B. S. and Amaranath, T. (2004). general solution of unsteady Stokes equations,” *Fluid Dynamics Research.* 35(3), 229–236. <https://doi.org/10.1016/j.fluidyn.2004.06.001>
- Вопросу, к., (2019). о нестационарном и нелинейном нагреве. *Физ*, (2), 55-57. <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-205-10-15>
- Гатчек Э., (2000). Вязкость жидкостей. — Л.: ОНТИ, 15-17. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-53-62>
- Гладков, С. О., (2018). О расчете времени остановки цилиндрического тела, вращающегося в сплошной вязкой среде. (3), 337-341. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-53-62>
- Гладков, С. О. (2009). К вопросу приложения второй ковариантной производной от векторной функции, 98 -103. <https://doi.org/10.18384/2310-7251-2009-3-42-67>
- Гнабаев, А. В., (2019). задачам гидродинамики и теории упругости. МГУ. Сер. Физ, 42-67. <https://doi.org/10.18384/2310-7251-2019-3-42-67>
- Гладков, С. О., (2016). нелинейной теории теплопроводности. *техн. Физ*, 2(2), 1-7. <https://journals.ioffe.ru>
- Глестон, С., (1999). Лейдлер. Теория абсолютных скоростей реакций. М.: ИЛ, 82. <http://convertonlinefree.com>

- Карслоу, Г., (2007). Теплопроводность твердых тел. — М.: Наука, 11-14.  
<https://doi.org/10.5281/zenodo.3522597>
- Ландау, Л. Д., & Лифшиц, Е. М. (2002). Гидродинамика. — М.: Наука, 122-129.  
<http://www.immsp.kiev.ua>
- Орешина, И. В. (2012). Физический журнал Российский. – М.«МГУ, уни», (32), 44-49. <https://cyberleninka.ru>
- Севастьянов, Р. М. (2013). Зависимость вязкости от температуры. зап, (3), 111–114.  
<https://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-205-10-15>
- Сивухин, Д.В. (2011). Дрейфовая теория движения заряженной частицы в электромагнитных полях Вып, 287. <https://doi.org/10.20948/prepr-2017-43>
- Сидоров, В.И. (2008). классическая электродинамика, 155. <https://journals.ioffe.ru>
- Сидоров, В.И. (2010). мультипольная теория в электромагнетизме. (4), 329–335.  
<https://journals.ioffe.ru>
- Фогельсон, Р. Л. & Лихачев, Е. Р. (2001). Температурная зависимость вязкости. техн. Физ. (8), 128–131. <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-205-10-15>
- Френкель, Я. И. (2002). Кинетическая теория жидкостей. — Л.: Наука, 49–51. URL:  
<http://libr.msu.by/handle/123456789/10856>
- Франкбаев, Д., Каменецкий, Д. А. (2016). гармонические по времени электромагнитные поля. допол. –М.: Наука, 492. <https://vyou@yandex.ru>