



حل عددی مسائل مقدار اولیه و مقدار سرحدی مرتبه دوم با روش تبدیل فازی

پوهنیار احمد فرهاد ظاهر

دیپارتمنت آنالیز ریاضی، پوهنځی ریاضیات، پوهنتون کابل، کابل، افغانستان

ایمیل: farhad.zahir1400@gmail.com

چکیده

تبدیل فازی ابزاری مؤثر در ریاضیات عددی است که با تبدیل مسائل از فضای توابع متمادی به فضای وکتوری بعد متناهی، امکان حل ساده‌تر آن‌ها را فراهم می‌سازد. هدف این تحقیق بررسی کاربرد تبدیل فازی در حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم است. در این مطالعه، روش تبدیل فازی برای حل مسائل مقدار اولیه، مسائل مقدار سرحدی دو نقطه‌ای و معادلات دیفرانسیلی منفرد مرتبه دوم به کار گرفته شده است. روش تحقیق بر پایه ارائه الگوریتم‌های عددی برای تقریب حل مسائل خطی و غیرخطی مرتبه دوم و استفاده از تبدیل معکوس برای دریافت جواب تقریبی است. نتایج نشان می‌دهد که این روش در مقایسه با روش‌های کلاسیکی؛ مانند تفاضلات متناهی، دقت و پایداری مناسبی دارد. همچنین تقارب روش‌های مبتنی بر تبدیل فازی اثبات شده و کارایی آن‌ها تأیید گردیده است.

واژه‌های کلیدی: تبدیل فازی؛ تحلیل تقارب؛ حل تقریبی؛ روش‌های عددی؛ معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم

Numerical Solution of Second-Order Initial and Boundary Value Problems Using Fuzzy Transform

Ahmad Farhad Zahir

Department of Mathematic Analysis Faculty of Mathematics, Kabul University, Kabul, Afghanistan

Email: farhad.zahir1400@gmail.com

Abstract

The F-transform is an effective tool in numerical mathematics that simplifies problem solving by transforming problems from the space of continuous functions into a finite-dimensional vector space. The aim of this study is to investigate the application of the F-transform in the numerical solution of second-order ordinary differential equations. In this work, the F-transform method is applied to solve initial value problems, two-point boundary value problems, and singular second-order differential equations. The research methodology is based on the development of numerical algorithms for approximating the solutions of linear and nonlinear second-order problems, along with the use of the inverse transform to obtain approximate solutions. The results demonstrate that, compared to classical methods such as the finite difference method, the proposed approach exhibits satisfactory accuracy and stability. Moreover, the convergence of F-transform-based methods is proven, and their efficiency is confirmed.

Keywords

Approximate Solution; Convergence Analysis; Fuzzy Transform; Numerical Methods; Second Order Differential Equation

ارجاع: ظاهر، ا. ف. (۱۴۰۵). حل عددی مسائل مقدار اولیه و مقدار سرحدی مرتبه دوم با روش تبدیل فازی. مجله

علمی - تحقیقی علوم طبیعی پوهنتون کابل، ۹(۱)، ۱۰۵-۱۳۶. <https://doi.org/10.62810/jns.v9i1.466>

مقدمه

الحمد لله رب العالمين و الصلوة و السلام على سيد المرسلين و على آله و أصحابه أجمعين.

نظریه روش تبدیل فازى نخستین بار توسط پرفیلیوا و چالیدیوا در سال ۲۰۰۱ مطرح شد. تبدیل فازى یک رابطه میان یک ستی از توابع متمادی و وکتورهای حقیقی n -بعدی برقرار می‌کند و بدین ترتیب، تابع مورد نظر را به یک وکتور در $\mathbb{R}^n$ تبدیل می‌کند. تبدیل معکوس فازى، این وکتور را دوباره به تابعی دیگر برمی‌گرداند که تقریب تابع اصلی را ارائه می‌کند (Perfilieva, 2001).

در سال ۲۰۰۴، پرفیلیوا مدل‌های تقریب فازى را برای یافتن حل یک معادله دیفرانسیل که رشد صخره‌های مرجانی را مدل‌سازی می‌کرد، به کار برد. در همان کار، تقارب مدل‌های تقریبی حاصل از تبدیل معکوس فازى نیز نشان داده شده است. در سال ۲۰۰۶، پرفیلیوا نظریه و کاربردهای تبدیل‌های فازى را ارائه کرد. در این تحقیق، نویسنده یک تکنیک جدید برای تبدیل فازى مستقیم و معکوس معرفی نمود که امکان ساخت مدل‌های تقریب مختلف را با استفاده از انتخاب توابع اساسی را فراهم می‌سازد (Perfilieva, Demicco, & Klir, 2004).

پرفیلیوا و همکاران نشان دادند که تبدیل‌های فازى مرتبه بالاتر نه تنها تابع را تقریب می‌کنند، بلکه مشتق آن را نیز تقریب می‌نمایند. در همان سال، پرفیلیوا تکنیک تبدیل فازى را به حالت تعمیم یافته‌ی $F^m, m > 0$ با مرکبه‌های پولینومی توسعه داد. او خاصیت‌های مفید مرکبه‌های فازى از جمله تقریب تابع اصلی دریافت کرد (Perfilieva, Danková, & Bede, 2011). سپس در سال ۲۰۱۸، زینالی و همکاران کاربرد و انعطاف‌پذیری روش را گسترش دادند؛ روشی که می‌تواند برای حل انواع مسائل خطی و غیرخطی، از جمله معادلات دیفرانسیل و انتگرالی، مورد استفاده قرار گیرد (Zeinali et al., 2018). در سال ۲۰۰۴، استفنیکا و ولاسک یک کاربرد بر نوع خاصی از معادلات با مشتقات قسمی (PDEs) با پس‌زمینه‌ی فیزیکی ارائه کردند (Stepnicka & Valásek, 2004). در این مقاله، آن‌ها حل عددی معادله‌ی موج را با استفاده از این تکنیک بررسی نمودند. در سال ۲۰۰۵، استفنیکا و همکاران معادلات دیفرانسیلی قسمی را به صورت عددی با استفاده از تبدیل‌های فازى حل کرده‌اند (Perfilieva & Kreinovich, 2011).

ساختار این مقاله طوری است که در بخش اول تبدیل فازى با خواص و توانای آن در تقریب توابع بیان گردیده در بخش دوم از تبدیل فازى برای حل مسائل قیمت اولیه استفاده شده و الگوریتم عددی آن استخراج گردیده است. در بخش سوم مسائل سرحدی مرتبه دوم ذریعه تبدیل فازى حل گردیده است و مفیدیت آن برای حل مسائل سرحدی خطی و غیر خطی نشان داده شده است. در بخش چهارم

میتود تبدیل فازی برای حل مسائل سرحدی منفرد استفاده و همچنان تحلیل تقارب آن صورت گرفته شده است.

یافته‌ها

معرفی تبدیل فازی

تعریف ۱، ۱. فرض کنید $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ نقاط ثابت در $\Omega = [a, b]$ باشند. طوری که $n \geq 2$ ، سپس ست‌های فازی $A_1, A_2, \dots, A_n$ با تابع عضویت $A_1(x), A_2(x), \dots, A_n(x)$ مشخص می‌شوند. تعریف شده روی Ω در صورتی که شرایط زیر را برآورده کند یک پارتیشن فازی از Ω را تشکیل می‌دهد.

$$۱. \quad A_i(x_i) = 1, A_i: [a, b] \rightarrow [0, 1], \quad i = 1, \dots, n$$

$$۲. \quad A_1(x) = 0 \quad \text{اگر } x \notin (x_1, x_2) \quad , \quad A_i(x) = 0 \quad \text{اگر } x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}) \quad \text{برای } i = 2, \dots, n-1$$

$$۳. \quad A_i(x) \text{ برای } i = 1, \dots, n \text{ متممادی باشد,}$$

$$۴. \quad A_i(x) \text{ اکیدا متزاید در } [x_{i-1}, x_i] \text{ برای } i = 2, \dots, n \text{ باشد و } A_i(x) \text{ اکیدا متناقص در } [x_i, x_{i+1}] \text{ برای } i = 1, \dots, n-1 \text{ باشد.}$$

$$۵. \quad \text{برای هر } x \in [a, b] \text{ رابطه } \sum_{i=1}^n A_i(x) = 1 \text{ صدق نماید (Perfilieva, 2006).}$$

شرط ۵ شرط روسپینی نامیده می‌شود؛ زیرا آندریک روسپینی آن را در قرن ۱۷ به برای اولین بار معرفی کرد. شرط Ruspini یک شرط کاملاً قوی است زیرا تابع اساسی را مجبور می‌کند تا به روشی خاص با تابع که نمایش تقریبی آن ارائه می‌شود، مطابقت داشته باشد. برای پارتیشن فازی یک‌نواخت h یعنی برای $i = 1, \dots, n, x_i = a + (i-1)h$ در آن $h = \frac{b-a}{n-1}, n \geq 2$ این دو شرط زیر به‌طور همزمان برآورده می‌شوند:

$$۶. \quad A_i(x_i - x) = A_i(x_i + x) \quad \forall x, \quad i = 2, \dots, n-1, n > 2$$

$$۷. \quad A_{i+1}(x) = A_i(x-h) \quad \forall x, \quad i = 2, \dots, n-1, n > 2$$

تعریف ۲، ۱. فرض کنید $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ نقاط ثابتی در یک ناحیه تعریف $\Omega = [a, b]$ باشند که در آن $n \geq 2$ باشد، سپس گفته می‌شود که تابع یک پارتیشن فازی متناظر است، اگر و تنها اگر $A_i(x_i + x) = A_{i+1}(x_{i+1} + x)$ برای هر $x \in [0, h_i]$ طوری که $i = 2, \dots, n-1$ (Perfilieva, 2006).

لیما ۱، هر پارتیشن فازی یکنواخت یک پارتیشن متناظر است

اثبات: برای $i = 2, \dots, n-1$ و $\forall x \in [0, h]$ شرط "(V)" دلالت بر این دارد که

$$\begin{aligned} A_{i+1}(x_{i+1} - x) &= A_i(x_{i+1} - x - h) = A_i(x_{i+1} - h - x) \\ &= A_i(x_i - x) (\because x_{i+1} - h = x_i) = A_i(x_i + x) \end{aligned}$$

تبصره ۱،۱. در صورت که پارتیشن فازی یکنواخت باشد رابطه $\int_{x_i}^{x_{i+1}} A_i(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} A_{i+1}(x) dx$ را بین توابع اساسی برای $i = 2, \dots, n-1$ صدق می‌کند.

قضیه ۱،۱. یک پارتیشن فازی یک‌نواخت از $\Omega = [a, b]$ با توابع عضویت $A_1, A_2, \dots, A_n$ که در آن $n \geq 3$ رابطه زیر را برای $i = 2, 3, \dots, n-1$ $h = \frac{b-a}{n-1}$ و $x_i = a + (i-1)h$ صدق می‌کند.

$$\int_{x_1}^{x_2} A_1(x) dx = \int_{x_{n-1}}^{x_n} A_n(x) dx = \frac{h}{2}, \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} A_i(x) dx = h \quad (1.1)$$

تبصره ۱،۱: بر اساس تعریف (۱،۱) انواع بسیاری از توابع عضویت وجود دارد که از میان آن‌ها تابع عضویت مثلثی و تابع عضویت سینوسی با موفقیت برای برخی مسائل عملی به ویژه معادلات دیفرانسیل اعمال شده است (Wei Chen, 2014) که در این مقاله توابع عضویت مثلثی و سینوسی و مقایسه آن‌ها استفاده خواهیم کرد (Perfilieva, 2006).

تعریف ۳،۱ توابع عضویت مثلثی و سینوسی را می‌توان با فرمول زیر بیان کرد:

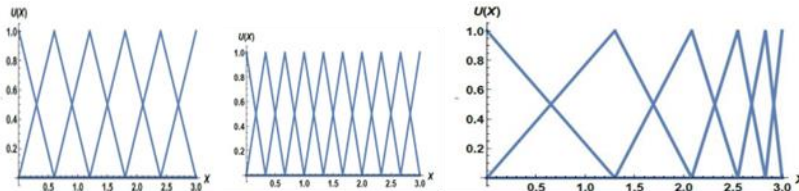
$$\begin{aligned} A_1(x) &= \begin{cases} 1 - \frac{x-x_1}{h_1} & x \in [x_1, x_2] \\ 0 & x \notin [x_1, x_2] \end{cases}, A_n(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{n-1}}{h_{n-1}} & x \in [x_{n-1}, x_n] \\ 0 & x \notin [x_{n-1}, x_n] \end{cases}, \\ A_i(x) &= \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h_{i-1}} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ 1 - \frac{x-x_i}{h_i} & x \in [x_i, x_{i+1}] \text{ for } i = 2:n-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\ S_1(x) &= \begin{cases} 0.5 \left(\cos \frac{\pi}{h_1} (x - x_1) + 1 \right) & x \in [x_1, x_2] \\ 0 & x \notin [x_1, x_2] \end{cases}, \\ S_n(x) &= \begin{cases} 0.5 \left(\cos \frac{\pi}{h_n} (x - x_n) + 1 \right) & x \in [x_{n-1}, x_n] \\ 0 & x \notin [x_{n-1}, x_n] \end{cases}, \\ S_i(x) &= \begin{cases} 0.5 \left(\cos \frac{\pi}{h_i} (x - x_i) + 1 \right) & x \in [x_{i-1}, x_{i+1}] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

طوری که $h_1 = x_2 - x_1$ $h_n = x_n - x_{n-1}$ $h_i = x_{i+1} - x_i$ برای $i = 2, \dots, n-1$

تبصره ۲،۱: برای یک پارتیشن فازی یکنواخت داریم که $h_1 = h_2, \dots, = h_n = h$ و در آن $h =$

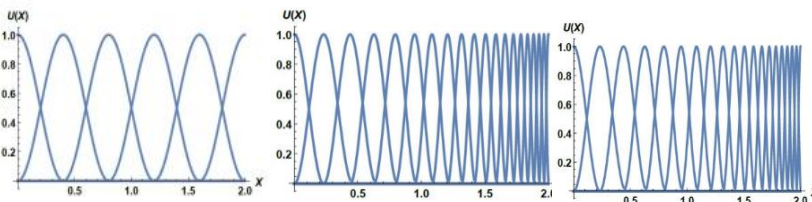
$$\frac{b-a}{n-1}$$

بر اساس تعریف ۳،۱ شکل ۱ تقسیم‌بندی فازی یک‌نواخت و غیر یک‌نواخت از انتروال $[0,3]$ با تابع عضویت مثلثی که ذریعه نرم افزار متمتیکا بدست آمده است را نشان می‌دهد.



شکل ۱: تابع عضویت مثلثی

همچنین شکل ۲ تقسیم‌بندی فازی یک‌نواخت و غیر یک‌نواخت از انتروال $[0,2]$ با تابع عضویت سینوسی که ذریعه نرم افزار متمتیکا بدست آمده است را نشان می‌دهد.



شکل ۲: تابع عضویت سینوسی

تعریف ۴،۱. فرض کنید $A_1, A_2, \dots, A_n, (n \geq 3)$ تابع عضویت فازی باشد که یک پارتیشن فازی از $[a,b]$ باشد و $f(x) \in C[a,b]$ در این صورت $F_n[f] = [F_1, F_2, \dots, F_n]$ طوری که

$$F_i(x) = \frac{\int_a^b f(x) A_i(x) dx}{\int_a^b A_i(x) dx} \quad (2.1)$$

برای $i = 1, \dots, n$ تبدیل فازی مطابق $A_1, A_2, \dots, A_n$ است (Dvorak, 2016 & Vilum, Perfilieva) (Wei Chen, 2014).

تبصره ۳،۱:

- اگر $A_1, A_2, \dots, A_n$ یک پارتیشن فازی یکنواخت را تشکیل دهند، بر اساس قضیه (۱،۱) می‌توان معادله (۲،۱) را به صورت زیر نوشت:

$$F_1[f] = \frac{2}{h} \int_{x_1}^{x_2} f(x) A_1(x) dx, F_n[f] = \frac{2}{h} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) A_n(x) dx,$$

$$F_i[f] = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) A_i(x) dx \text{ for } i = 2, \dots, n-1$$

• تبدیل فازی یک اپراتور خطی است؛ یعنی برای $f = ct + dq$ و $t, q \in C[a, b], a, b \in \mathbb{R}$

$$F_n[f] = [F_1, F_2, \dots, F_n] = c[T_1, T_2, \dots, T_n] + b[Q_1, Q_2, \dots, Q_n] \quad (3.1)$$

طوری که $[F_1, F_2, \dots, F_n], [T_1, T_2, \dots, T_n]$ و $[Q_1, Q_2, \dots, Q_n]$ مرکب‌های تبدیل فازی به ترتیب از f, t و q می‌باشد.

اثبات: برای $i = 1, \dots, n$

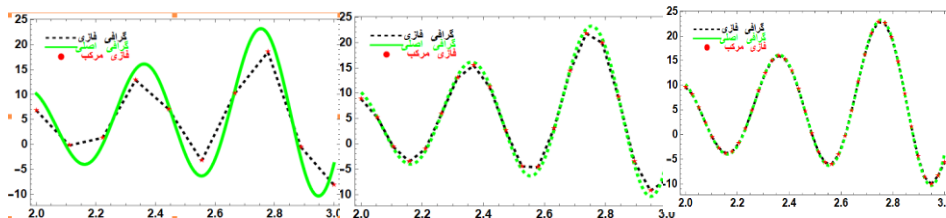
$$F_i = \frac{\int_a^b f(x) A_i(x) dx}{\int_a^b A_i(x) dx} = \frac{\int_a^b (ct(x) + bq(x)) A_i(x) dx}{\int_a^b A_i(x) dx}$$

$$c \frac{\int_a^b t(x) A_i(x) dx}{\int_a^b A_i(x) dx} + b \frac{\int_a^b q(x) A_i(x) dx}{\int_a^b A_i(x) dx} = cT_i + bQ_i$$

از آنجایی که i اختیاری است. بنابراین، ثابت شد.

قضیه ۲، ۱: فرض کنید $A_1, A_2, \dots, A_n, (n \geq 3)$ تابعی اساسی باشد که یک پارتیشن فازی یک‌نواخت از $[a, b]$ را تشکیل می‌دهد و f در (a, b) دو مرتبه مشتق متمادی داشته باشد در این صورت برای $i = 1, \dots, n$ رابطه $F_i = f(x_i) + O(h^2)$ صدق می‌کند (Wei Chen, 2014).

قضیه ۳، ۱: فرض کنید f یک تابع متمادی در $[a, b]$ باشد. سپس برای هر $\varepsilon > 0$ وجود دارد n_ε و یک پارتیشن فازی $A_1, A_2, \dots, A_n$ از $[a, b]$ وجود دارد به طوری که برای همه $x \in [a, b]$ رابطه $|f(x) - f_{F, n_\varepsilon}(x)| \leq \varepsilon$ (Jha, Verma) است مطابق $A_1, \dots, A_{n_\varepsilon}$ است (Keyenat, 2019 &). حالا جهت نشان دادن این که تبدیل فازی می‌تواند نمایش تقریبی مناسب و بهتر از توابع متمادی مختلف ارائه نماید تبدیل فازی مستقیم و تبدیل معکوس آن را بالای تابع $f: [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ طوری که $f(x) = e^x \cos(16x) + x^2$ مطابق شکل ۳ تطبیق می‌نمایم.

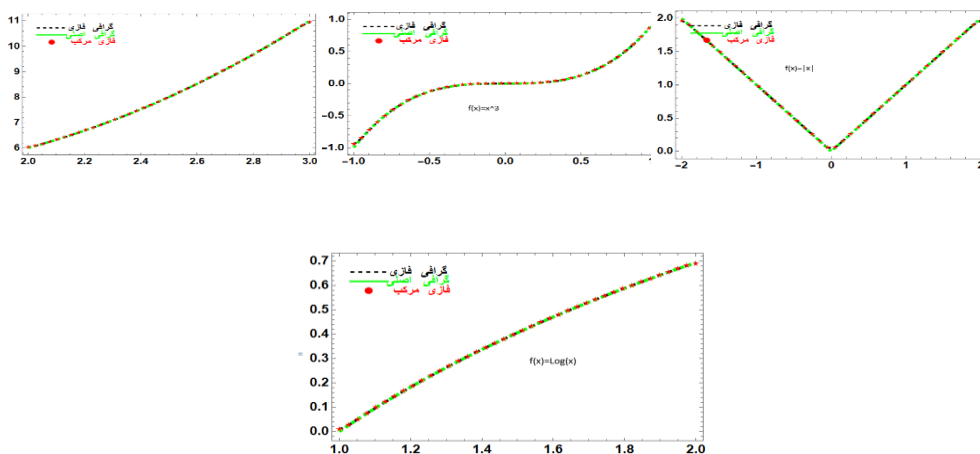


شکل ۳: مقایسه گراف اصلی تابع $f(x) = e^x \cos(16x) + x^2$ با گراف که توسط فازی بدست آمده

در شکل ۳ سه گراف دیده می‌شود که در آن تبدیل فازی بالای تابع $f(x) = e^x \cos(16x) + x^2$ به ترتیب از چپ به راست برای نقاط $n = 10$, $n = 20$ و $n = 40$ تطبیق گردیده است و دیده میشود که هر قدر تعداد نقاط زیاد شود گراف ارائه شده ذریعه تبدیل فازی به گراف اصلی تابع متذکزه مقارب است و همچنان خطای مطلق آن در جدول زیر محاسبه شده است.

جدول 1: محاسبه خطای مطلق تقریب بدست آمده ذریعه تبدیل فازی تابع $f(x)=e^x \cos[f_0](16x)+x^2$

Points	Exact	قیمت تقریبی تابع ذریعہ تبدیل فازی			
...	Solution	خطای مطلق $n = 20$	خطای مطلق $n = 40$	خطای مطلق $n = 60$	خطای مطلق $n = 80$
2	10.164100	1.31994	5.559632E - 1	2.54459E - 1	1.20917E - 1
2.2	-2.38553	8.9606E - 1	2.17955E - 1	5.3148E - 2	1.30887E - 2
2.4	14.187400	1.2856	3.15923E - 1	7.74374E - 2	1.91205E - 2
2.6	-3.00553	1.44796	3.6364E - 1	9.00646E - 2	2.23515E - 2
2.8	19.0865	1.296	3.33315E - 1	8.34561E - 2	2.08186E - 2
2.9	-5.2671	1.1455	2.69653E - 1	6.47924E - 2	1.58477E - 2



شکل ۴: تطبیق تبدیل فازی بالای توابع پولینومی، لوگارتمی، قیمت مطلقه

جدول ۱ نشان می دهد که با افزایش تعداد نقاط ($n = 20, 40, 60, 80$) خطا کمتر می شود که این تطبیق موثر تبدیل فازی در ارائه تقریبی از توابع را نشان می دهد.

حال تبدیل فازی را بالای تابع پولینومی $2x^2 - 5x + 8$ ، تابع لوگارتمی $\log(x)$ تابع قیمت مطلقه $|x|$ تابع مثلثاتی $\cos(x)$ و e^x برای $n = 40$ تابع عضویت تطبیق می نماییم.

شکل ۴ نشان می دهند که ذریعه تبدیل فازی می توان نمایش تقریبی کلاس های مختلف از توابع را بدست بیاوریم که در حل عددی معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم کمک می نماید و در بخش بعدی مورد مطالعه قرار خواهد گرفت.

۲- حل عددی مسائل مقدار اولیه مرتبه دوم ذریعه تبدیل فازی

در این بخش الگوریتمی موثر که بر اساس کار (وی چین، ۲۰۱۴) ساخته شده است در نظر می گیریم و آن را برای انواع معادلات خطی و غیر خطی اعمال می کنیم. معادله زیر را در نظر بگیریم.

$$u''(x) + qu'(x) = h(x, u) \quad u(x_1) = u_1, \quad u'(x_1) = u'_1 \quad (1.2)$$

طوری که $x \in [a, b]$ و q یک ثابت است. فرض می کنیم توابع $u(x)$ و $h(x, u)$ توابع به اندازه کافی هموار باشد، همچنین یک پارتیشن فازی یک نواخت از $[a, b]$ را مد نظر می گیریم که در آن $x_i = a, x_n = b, h = \frac{b-a}{n-1}, a + (i-1)h, i = 1, 2, \dots, n$ بر اساس انکشاف سلسله تیلور تقریبی از معادله های $u'(x)$ و $u''(x)$ را با دقت مرتبه اول و دوم طوری زیر می نویسیم:

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + O(h), \quad u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

قرار دهید $u_1 = u(x+h)$ و $u_2 = u(x-h)$ در نتیجه معادلات فوق را می توان طوری زیر نوشت

$$u'(x) = \frac{u_1 - u}{h} + O(h), \quad u''(x) = \frac{u_1 - 2u(x) + u_2}{h^2} + O(h^2)$$

حالا تبدیل فازی توابع $u(x), u_1(x), u'(x), u''(x)$ و $u(x)$ را بدست می آوریم و جهت خلاصه سازی از سمبول های زیر استفاده می نماییم.

$$F_n[u'] = [U'_2, U'_3, \dots, U'_{n-1}], \quad F_n[u''] = [U''_2, U''_3, \dots, U''_{n-1}], \quad F_n[u] = [U_2, U_3, \dots, U_{n-1}] \\ F_n[u_1] = [U_{1,2}, U_{1,3}, \dots, U_{1,n-1}], \quad F_n[u_2] = [U_{2,2}, U_{2,3}, \dots, U_{2,n-1}]$$

تبصره ۱، ۲. وکتورهای بالا دو عنصر کمتر دارند و دلیل آن این است که امکان دارد تابع u_n در $[x_{n-1}, x_n]$ و u_2 در $[x_1, x_2]$ تعریف نشده باشد. بر اساس قضیه (۲، ۱) و تعریف (۴، ۱) برای $i = 2, \dots, n$ معادلات زیر صدق می‌کند.

$$F_i[u'] = U'_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u'(x) A_i(x) dx, \quad F_i[u''] = U''_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u''(x) A_i(x) dx$$

$$F_i[u1] = U1_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u(x+h) A_i(x) dx, \quad F_i[u2] = U2_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u(x-h) A_i(x) dx$$

قضیه ۱، ۲. با توجه به تابع $u(x)$ مرکبه فازی تابع $u_1(x) = u(x+h)$ و $u_2(x) = u(x-h)$ را می‌توان با فرمول زیر بدست آورد.

$$\begin{aligned} U1_i &= U_{i+1} & \text{for } i &= 2, \dots, n-2 \\ U1_{n-1} &= U_n + O(h^2) & \text{for } i &= n-1 \\ U2_i &= U_{i-1} & \text{for } i &= 3, \dots, n-1 \\ U2_2 &= U_1 + O(h^2) & \text{for } i &= 2 \end{aligned}$$

اثبات: برای $i = 2, \dots, n-2$

$$U1_i = \frac{\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} U_1(x) A_i(x) dx}{\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} A_i(x) dx} = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u(x+h) A_i(x) dx$$

قرار دهید $x+h=p$ وقتی که $x \rightarrow x_{i-1}, p \rightarrow x_i$ و وقتی $x \rightarrow x_{i+1}, p \rightarrow x_{i+2}$ نتیجه می‌شود که

$$U1_i = \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+2}} u(p) A_i(p-h) dp = \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+2}} u(p) A_{i+1}(p) dp \Rightarrow U1_i = U_{i+1}$$

$$U1_{n-1} = \frac{\int_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} u(x+h) A_{n-1}(x) dx}{\int_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} A_{n-1}(x) dx} = \frac{2}{h} \int_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} u(x+h) A_{n-1}(x) dx, \text{ for } i = n-1$$

قرار دهید $x+h=p$ وقتی که $x \rightarrow x_{n-2}, p \rightarrow x_{n-1}$ نتیجه می‌شود که

$$U1_{n-1} = \frac{2}{h} \int_{x_{n-1}}^{x_n} u(p) A_{i-1}(p-h) dp = \frac{2}{h} \int_{x_{n-1}}^{x_n} u(p) A_n(p) dp$$

طبق قاعده دوزنقه‌یی داریم:

$$\begin{aligned} U1_{n-1} &= \frac{2}{h} \left[\frac{h}{2} (u(x_n) A_n(x_n)) + (u(x_{n-1}) A_n(x_{n-1})) + O(h^3) \right] \\ &= u(x_n) + O(h^2) (\because A_n(x_{n-1}) = 0) = U_n + O(h^2) \end{aligned}$$

$$U2_i = \frac{\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} U_2(x) A_i(x) dx}{\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} A_i(x) dx} = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u(x-h) A_i(x) dx \text{ for } i = 3, \dots, n-1$$

قرار دهید $x-h = p$ وقتی $x \rightarrow x_{i-1}, p \rightarrow x_{i-2}$ و وقتی $x \rightarrow x_{i+1}, p \rightarrow x_i$ نتیجه می شود که

$$U2_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-2}}^{x_i} u(p) A_i(p+h) dp = \frac{1}{h} \int_{x_{i-2}}^{x_i} u(p) A_{i-1}(p) dp \Rightarrow U2_i = U_{i-1}$$

$$U2_1 = \frac{\int_{x_2}^{x_3} u(x-h) A_2(x) dx}{\int_{x_2}^{x_3} A_1(x) dx} = \frac{2}{h} \int_{x_1}^{x_2} u(x-h) A_1(x) dx \text{ for } i = 2$$

فرض کنید $x-h = p$ وقتی $x \rightarrow x_2, p \rightarrow x_1$ و وقتی $x \rightarrow x_3, p \rightarrow x_2$ بدست میاریم که

$$U2_1 = \frac{2}{h} \int_{x_1}^{x_2} u(p) A_2(p+h) dp = \frac{2}{h} \int_{x_1}^{x_2} u(p) A_1(p) dp$$

با استفاده از قاعده ذوزنقه داریم که

$$U1_{n-1} = \frac{2}{h} \left[\frac{h}{2} (u(x_2) A_1(x_2)) + (u(x_1) A_1(x_1)) + O(h^3) \right] \\ = u(x_1) + O(h^2) (\because A_1(x_2) = 0) = U_1 + O(h^2)$$

اکنون با استفاده از قضیه (۲، ۱) تبدیل فازی و $F_n[u']$ را طوری زیر محاسبه می نماییم.

$$F_n[u'] = \frac{F_n[u_1] - F_n[u]}{h} + O(h) = \frac{U1_i - U_i}{h} + O(h), \text{ for } i = 2:n-1 \\ = \frac{U_{i+1} - U_i}{h} + O(h) \Rightarrow U'_i = \frac{1}{h} [U_{i+1} - U_i] + O(h) \text{ for } i = 2, : n-1$$

باقیمت گذاری U'_i برای $i = 2, \dots, n$ روابط زیر را دریافت می نماییم.

$$U'_2 = \frac{1}{h} [U_3 - U_2] + O(h), U'_2 = \frac{1}{h} [U_3 - U_2] + O(h) \dots U'_{n-2} = \frac{1}{h} [U_{n-1} - U_{n-2}] + O(h), U'_{n-1} \\ = \frac{1}{h} [U_n - U_{n-1}] + O(h)$$

شکل متریکس U'_i برای $i = 2, \dots, n$ به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} U'_2 \\ U'_3 \\ \vdots \\ U'_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\text{حال قرار می دهیم } \bar{F}_n[u] = [U_2, \dots, U_n]^T \text{ و } M = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

به طور مشابه برای u'' میایم که:

$$F_n[u''] = \frac{F_n[u_1] - 2F_n[u] + F_n[u_2]}{h^2} + O(h)$$

$$U_2'' = \frac{1}{h^2}(U_3 - 2U_2 + U_1) + O(h^2), U_3'' = \frac{1}{h^2}(U_4 - 2U_3 + U_2) + O(h^2), \dots, U_{n-1}'' \\ = \frac{1}{h^2}(U_n - 2U_{n-1} + U_{n-2}) + O(h^2)$$

روابط فوق را به شکل متریکیس طوری زیر می‌نویسیم.

$$\begin{bmatrix} U_2'' \\ U_3'' \\ \vdots \\ U_{n-1}'' \end{bmatrix} = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_{n-1} \end{bmatrix}$$

در نتیجه $F_n[u''] = H\tilde{F}_n[u]$ طوری که $H = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ و

$\tilde{F}_n[u] = [U_1, \dots, U_n]^T$ اکنون دوباره معادله (2.1) را در نظر می‌گیریم و تبدیل فازی را روی آن و شرایط اولیه آن اعمال می‌کنیم در نتیجه با استفاده از خاصیت خطی بودن تبدیل فازی نتیجه می‌شود:

$$F_n[u'' + qu'] = F_n[h(x, y)] \Rightarrow F_n[u''] + qF_n[u'] = F_n[h] \Rightarrow$$

$$H_{(n-2) \times n} \tilde{F}_n[u]_{n \times 1} + qM_{(n-2) \times (n-1)} \bar{F}_n[u]_{(n-1) \times 1} = F_n[h]$$

طوری که $F_n[h] = [F_2, \dots, F_{n-1}]$ مولفه اول و آخر به دلیل محدودیت ابعاد در $F_n[h]$ وجود ندارد

$$u'(x_1) = u'_1 \Rightarrow \frac{u(x_1 + h) - u(x_1)}{h} = u'_1 \Rightarrow \frac{u_2 - u_1}{h} = u'_1 \Rightarrow \frac{1}{h}(F_n[u_2] - F_n[u_1]) \\ = F_n[u'_1] \Rightarrow \frac{1}{h}[U_2 - U_1] = u'_1, u(x_1) = u_1 \Rightarrow U_1 = u_1$$

حال باید متریکیس M و H را به گونه ای گسترش دهیم که بتواند حالت کلی معادلات فوق را نشان دهد. بنابراین، متریکیس $M1$ و $H1$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$M1 = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} \quad H1 = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} h & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -h & h & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

بر اساس متریکیس $H1$ و $M1$ وکتور $F_n(h)$ را با اضافه کردن جزء اول و دوم به صورت زیر گسترش می‌دهیم.

$$\tilde{F}_n[h] = \left[\frac{u_1}{h}, u'_1, F_2, \dots, F_{n-1} \right]^T \quad (2.2)$$

بنابراین، مسأله (۲، ۱) را می‌توان به طور کامل با عبارت زیر نشان داد با توجه به وکتور مجهول $\tilde{F}_n[h]$

$$[H1 + qM1]\tilde{F}_n[u] = \tilde{F}_n[h]$$

تبصره ۲، ۱. از هر روش کارآمدی می‌توان برای حل سیستم معادله فوق استفاده کرد، در اینجا سعی می‌کنیم معکوس متریکس $H1 + qM1$ را محاسبه کنیم تا بتوانیم روش حل مسئله (1.2) بدست آوریم.

متریکس $H1 + qM1$ طوری زیر داده شده:

$$[H1 + qM1] = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{h^2} & \frac{-(qh+2)}{h^2} & \frac{(qh+1)}{h^2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h^2} & \frac{-(qh+2)}{h^2} & \frac{(qh+1)}{h^2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & \frac{-(qh+2)}{h^2} & \frac{(qh+1)}{h^2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{h^2} & \frac{-(qh+2)}{h^2} & \frac{(qh+1)}{h^2} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

حال از آن جایی که متریکس $[H1 + qM1]$ یک متریکس مثلثی تحتانی است و معکوس پذیر است هر گاه هر عنصر قطر اصلی آن خلاف صفر باشد، حال چون $\frac{1}{h} \neq 0$ پس $\frac{qh+1}{h^2} \neq 0$ در نتیجه $\frac{1}{h} \neq -c$. بنابراین، باید تعداد نقاط را طوری انتخاب کنیم که $-q \neq \frac{1}{h}$ را پیدا کنیم. معکوس متریکس $[H1 + qM1]$ را برای $n = 5$ و $q \neq \frac{-1}{h}$ در نظر می‌گیریم. بنابراین، ما به دنبال معکوس متریکس D زیر هستیم:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{h^2} & \frac{-(qh+2)}{h^2} & \frac{(qh+1)}{h^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h^2} & \frac{-(qh+2)}{h^2} & \frac{(qh+1)}{h^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & \frac{-(qh+2)}{h^2} & \frac{(qh+1)}{h^2} \end{bmatrix}_{5 \times 5}$$

فرض کنید معکوس متریکس D^{-1} باشد و D متریکس مثلثی تحتانی باشد، معکوس آن برابر است. همچنین یک متریکس مثلثی تحتانی فرض کنید که D^{-1} به صورت زیر باشد:

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & 0 \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} \end{bmatrix}_{5 \times 5}$$

$$I_{5 \times 5} = D \times D^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{h^2} & \frac{-(qh+2)}{h^2} & \frac{(qh+1)}{h^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h^2} & \frac{-(qh+2)}{h^2} & \frac{(qh+1)}{h^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & \frac{-(qh+2)}{h^2} & \frac{(qh+1)}{h^2} \end{bmatrix}_{5 \times 5} \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & 0 \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} \end{bmatrix}_{5 \times 5}$$

با معادل سازی مولفه‌های دو طرف معادله، مؤلفه‌های D^{-1} را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{c_{11}}{h} = 1 &\Rightarrow c_{11} = h^2 \left[\frac{1}{h} \right], -\frac{c_{11}}{h} + \frac{c_{21}}{h} \Rightarrow c_{21} = h^2 \left[\frac{1}{h} \right], \frac{c_{22}}{h} = 1 \Rightarrow c_{22} = h^2 \left[\frac{1}{h} \right], \\ \frac{1}{h} c_{11} - \frac{(qh+2)}{h^2} c_{21} + \frac{(qh+1)}{h^2} c_{31} &= 0 \Rightarrow c_{31} = h^2 \left[\frac{1}{h} \right], \\ -\frac{(qh+2)}{h^2} c_{22} + \frac{(qh+1)}{h^2} c_{32} &= 0 \Rightarrow c_{32} = h^2 \left[\frac{(1+qh)^2 - 1}{qh^2(1+qh)} \right], \frac{(qh+1)}{h^2} c_{33} = 1 \\ \Rightarrow c_{33} &= h^2 \left[\frac{1}{1+qh} \right], \frac{1}{h^2} c_{21} - \frac{(qh+2)}{h^2} c_{31} + \frac{(qh+1)}{h^2} c_{41} = 0 \Rightarrow c_{41} = h^2 \left[\frac{1}{h} \right] \end{aligned}$$

در ادامه به روش فوق نتایج زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} c_{42} &= h^2 \frac{((1+qh)^3 - 1)}{(qh^2(1+qh)^2)}, c_{43} = h^2 \frac{((1+qh)^2 - 1)}{(qh(1+qh)^2)}, c_{44} = h^2 \frac{1}{(1+qh)}, \\ c_{51} &= h^2 \frac{1}{(h)}, c_{52} = h^2 \frac{((1+qh)^4 - 1)}{(qh^2(1+qh)^3)}, c_{53} = h^2 \frac{((1+qh)^3 - 1)}{(qh(1+qh)^3)}, \\ c_{54} &= h^2 \frac{((1+qh)^2 - 1)}{(qh(1+qh)^2)}, c_{55} = h^2 \frac{1}{(1+qh)} \end{aligned}$$

بر اساس محاسبات فوق نتیجه زیر را داریم:

$$D^{-1} = h^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{h} & \frac{(1+qh)^2-1}{qh^2(1+qh)} & \frac{1}{1+qh} & 0 & 0 \\ \frac{1}{h} & \frac{(1+q)^3-1}{(qh^2(1+qh)^2)} & \frac{((1+qh)^2-1)}{(qh(1+qh)^2)} & \frac{1}{(1+qh)} & 0 \\ \frac{1}{h} & \frac{((1+qh)^4-1)}{(qh^2(1+qh)^3)} & \frac{((1+qh)^3-1)}{(qh(1+qh)^3)} & \frac{((1+qh)^2-1)}{(qh(1+qh)^2)} & \frac{1}{(1+qh)} \end{bmatrix}_{5 \times 5}$$

حال با تعمیم مفهوم بالا وقتی $q \neq 0$ می‌توانیم معکوس $H1 + qM1$ را به دست آوریم:

$$(H1 + qM1)^{-1} = h^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{h} & \frac{(1+qh)^2-1}{(qh^2(1+qh))} & \frac{1}{1+qh} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{h} & \frac{(1+q)^3-1}{(qh^2(1+qh)^2)} & \frac{((1+qh)^2-1)}{(qh(1+qh)^2)} & \frac{1}{1+qh} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{h} & \frac{((1+qh)^{n-1}-1)}{(qh^2(1+qh)^{n-2})} & \frac{((1+qh)^{n-2}-1)}{(qh(1+qh)^{n-2})} & \frac{((1+qh)^{n-3}-1)}{(qh(1+qh)^{n-3})} & \dots & \frac{((1+qh)^3-1)}{(qh(1+qh)^3)} & \frac{((1+qh)^2-1)}{(qh(1+qh)^2)} & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

به طور مشابه وقتی $q = 0$ سپس $H1 + qM1 = H1$ و به همین ترتیب می‌توانیم نشان دهیم که:

$$(H1)^{-1} = h^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{h} & \frac{2}{h} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{h} & \frac{3}{h} & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{h} & \frac{n-1}{h} & n-2 & n-3 & \dots & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

با جایگزینی مقادیر بالا در معادله (2.2) دو الگوریتم زیر بدست می‌آید برای دریافت $[U_1, \dots, U_n]$

If $q \neq 0$

$$S[1]: \begin{cases} U_1 = u_1 \\ U_2 = u_1 + hu'_1 \\ \text{for } i = 3, \dots, n \\ U_i = u_1 + \frac{(1+qh)^{i-1} - 1}{q(1+qh)^{i-2}} u'_1 + h \sum_{p=2}^{i-2} \frac{(1+qh)^{i-j} - 1}{q(1+qh)^{i-j}} F_p[h] + \frac{h^2}{1+qh} F_{i-1}, \end{cases}$$

If $q = 0$

$$S[2]: \begin{cases} U_1 = u_1 \\ U_2 = u_1 + hu'_1 \\ \text{for } i = 3, \dots, n \\ U_i = u_1 + (i-1)hu'_1 + h^2 \left(\sum_{p=2}^{i-2} (i-p)F_p[h] + F_{i-1} \right) \end{cases}$$

دو الگوریتم بالا نشان می‌دهد که ما باید حد $F_p[h(x, y)]$ را برای $p = 2, \dots, i-2$ محاسبه کنیم؛ اما شامل تابع مجهول $u(x)$ است برای حل این مشکل عبارت زیر را جایگزین می‌کنیم.

$$F_i = \frac{\int_a^b h(x, u(x)) A_i(x) dx}{\int_a^b A_i(x) dx}$$

بر اساس مشاهدات فوق، الگوریتم‌های زیر را بدست می‌آوریم:

If $q \neq 0$

$$S[3]: \begin{cases} U_1 = u_1 \\ U_2 = u_1 + hu'_1 \\ \text{for } i = 3, \dots, n \\ U_i = u_1 + \frac{(1+qh)^{i-1} - 1}{q(1+qh)^{i-2}} u'_1 + h \sum_{p=2}^{i-2} \frac{(1+qh)^{i-j} - 1}{q(1+qh)^{i-j}} F_p[h] + \frac{h^2}{1+qh} F_{i-1}, \end{cases}$$

If $q = 0$

$$S[4]: \begin{cases} U_1 = u_1 \\ U_2 = u_1 + hu'_1 \\ \text{for } i = 3, \dots, n \\ U_i = u_1 + (i-1)hu'_1 + h^2 \left(\sum_{p=2}^{i-2} (i-p)F_p[h] + F_{i-1} \right), \end{cases}$$

الگوریتم ۱، ۲: در اینجا الگوریتمی برای حل مسأله (۲، ۱) بدست می‌آوریم

– مسأله (۲، ۱) را در نظر بگیرید و از یک پارتیشن فازی یکنواخت h برای $[a, b]$ استفاده کنید که

$$h = \frac{b-a}{n-1} \text{ و } a = x_1, \dots, x_n = b$$

– توابع اساسی مثلثی و سینوسی با استفاده از تعریف (۳، ۱) استفاده نمایید.

– اگر $q \neq 0$ از الگوریتم [۳] برای محاسبه $[U_1, U_2, \dots, U_n]$ استفاده کنید.

- اگر $q = 0$ از الگوریتم [۴] برای محاسبه $[U_1, U_2, \dots, U_n]$ استفاده کنید.
- از تبدیل معکوس برای یافتن و تقریب حل مسأله به صورت زیر استفاده کنید:

$$u(x) = \sum_{i=1}^n U_i A_i(x) \quad (3.2)$$

مثال ۱،۲: حل عددی معادلات دیفرانسیلی زیر را که مسأله مقدار اولیه می‌باشد، ذریعه تبدیل فازی بدست می‌آوریم.

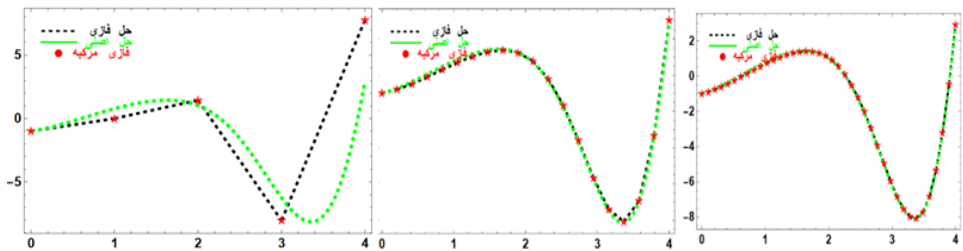
$$u''(x) + 3u(x) = x^3 \sin(2x) \quad u(0) = -1 \quad u'(0) = 1 \quad 0 \leq x \leq 4 \quad (4.2)$$

$$u''(x) - 2u'(x) = x^2 - 5u \quad u(0) = 1 \quad u'(0) = -1 \quad 0 \leq x \leq 3 \quad (5.2)$$

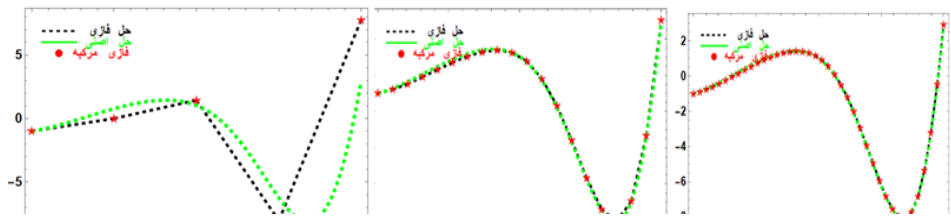
حل: معادله (4.2) مسأله شرایط اولیه بدون مشتق مرتبه اول می‌باشد و حل دقیق آن معادله زیر است:

$$u(x) = 12(-28 + x^2)\cos(2x) - 337\cos(\sqrt{3}x) + 90x\sin(2x) - x^3\sin(2x) + \frac{\sin(\sqrt{3}x)}{\sqrt{3}} \quad (6.2)$$

حال روش‌های حل $S[1], S[2], S[3], S[4]$ که در بالا بدست آوردیم، در نرم‌افزار ممتیکا تطبیق می‌نمایم که نتیجه آن در شکل ۵ مشخص شده است. طوری که خطوط سبز شکسته حل دقیق مسأله است خطوط سیاه شکسته حل تقریبی مسأله است که ذریعه تبدیل فازی بدست آمده است و ستاره‌های سرخ مرکبه‌های فازی را نشان می‌دهد. قابل ذکر است که تعداد نقاط در شکل ۵ به تعداد $n = 20$ می‌باشد.



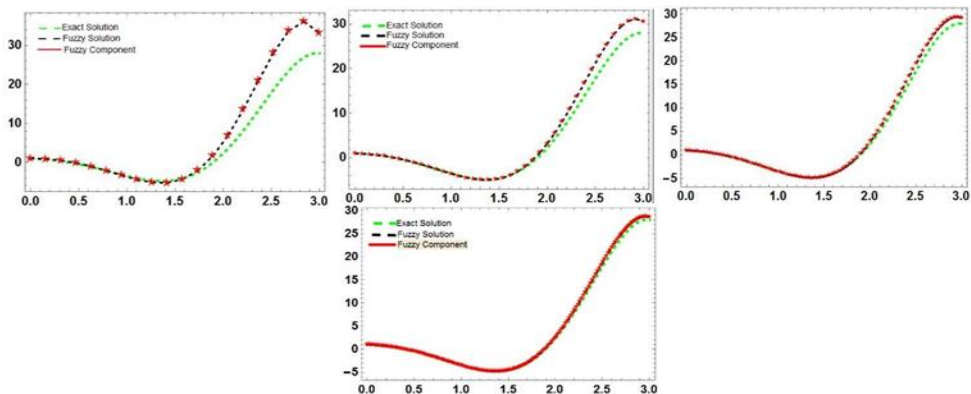
شکل ۶: منحنی‌های حل دقیق مسأله، حل تقریبی مسأله ذریعه تبدیل فازی و مرکبه‌های فازی به ترتیب از چپ به راست



شکل ۵: منحنی حل تقریبی معادله (4.2) و مقایسه آن با حل دقیق به ترتیب از چپ به راست برای $n = 5, 20, 40$ نقطه (مرکبه فازی) نشان می‌دهد

شکل 6 نشان می‌دهد که هر قدر تعداد نقاط (مرکبه‌های فازی) بیشتر شود، حل تقریبی بدست آمده ذریعه تبدیل فازی به حل دقیق مقارب می‌شود.

معادله (5.2) یک معادله دیفرانسیلی خطی دارای مشتق مرتبه اول می‌باشد و حل دقیق آن عبارت است از: $u(x) = \frac{1}{125}(-2 + 20x + 25x^2 + 127e^x \cos 2x - 136e^x \sin 2x)$ حال ذریعه نرم افزار متمکا روش‌های حل $S[1], S[2], S[3], S[4]$ را تطبیق می‌نماییم در نتیجه مقایسه حل دقیق و حل تقریبی بدست آمده ذریعه تبدیل فازی در شکل 7 مشخص گردیده است.



شکل ۷: منحنی حل تقریبی معادله (5.2) و مقایسه آن با حل دقیق به ترتیب از چپ به راست برای $n = 20, 40, 80, 160$ نقطه (مرکبه فازی) نشان می‌دهد

۳- حل تقریبی مسأله شرایط سرحدی مرتبه دوم بر اساس تبدیل فازی

در این بخش معادله دیفرانسیلی زیر که در بسیار از مسایل فیزیکی ظهور می‌کند مد نظر می‌گیریم.

$$u''(x) + tu'(x) = h(x, u) \quad u(x_1) = u_1, \quad u(x_n) = u_n \quad (1.3)$$

که در آن $x \in [x_1, x_n]$ و t یک ثابت است، ما یکک پارتیشن فازی یک‌نواخت از $[a, b]$ را در نظر می‌گیریم که در آن

$$u(x + 2h) = u(x) + 2hu'(x + h) + \frac{h^3}{3!}u'''(x + h) + O(h^4) \quad (2.3)$$

$$u(x + 2h) = u(x + h) + hu'(x + h) + \frac{h^2}{2!}u''(x + h) + \frac{h^3}{3!}u'''(x + h) + O(h^4) \quad (3.3)$$

اثبات:

$$u(p-2h) = u(p) - 2hu'(p) + \frac{(2h)^2}{2}u''(p) - \frac{(2h)^3}{6}u'''(p) + O(h^4)$$

$$p := x + 2h$$

$$u(x) = u(x+2h) - 2hu'(x+2h) + 2h^2u''(x+2h) - \frac{4}{3}h^3u'''(x+2h) + O(h^4)$$

$$u(x+2h) = u(x) + 2hu'(x+2h) - 2h^2u''(x+2h) + \frac{4}{3}h^3u'''(x+2h) + O(h^4)$$

$$u(x+2h) = u(x) + 2h \left[u'(x+h) + hu''(x+h) + \frac{h^2}{2}u'''(x+h) + \dots \right] -$$

$$2h^2[u''(x+h) + hu'''(x) + \dots] + \frac{4}{3}h^3[u(x+h) + O(h^4)]$$

بر اساس معادلات (2.3) و (3.3) به دست می آوریم که:

$$u'(x+h) = \frac{u(x+2h) - u(x)}{2h} + O(h^2) \quad (4.3)$$

$$u''(x+h) = \frac{u(x+2h) - 2u(x+h) + u(x)}{h^2} + O(h^2) \quad (5.3)$$

قرار دهید $u_2(x) = u(x+2h)$ و $u_1(x) = u(x+h)$ در معادلات (4.3) و (5.3) داریم که

$$u'(x+h) = \frac{u_2(x) - u_1(x)}{2h} + O(h^2), u''(x+h) = \frac{u_2(x) - 2u_1(x) + u(x)}{h^2} + O(h^2)$$

با اعمال تبدیل فازی در دو طرف معادلات فوق موارد زیر را بدست می آوریم.

$$F_n[u'(x+h)] = \frac{1}{2h} [F_n[u_2] - F_n[u_1]] + O(h^2) \quad (6.3)$$

$$F_n[u''(x+h)] = \frac{1}{h^2} [F_n[u_2] - 2F_n[u_1] + F_n[u]] + O(h^2) \quad (7.3)$$

از سمبول های زیر استفاده می نمایم:

$$F_n[u] = [U_1, \dots, U_{n-2}], F_n[u_1] = [U_{11}, U_{12}, \dots, U_{1n-2}], F_n[u_2] = [U_{21}, U_{22}, \dots, U_{2n-2}]$$

$$F_n[u'] = [U'_2, U'_3, \dots, U'_{n-1}], F_n[u''] = [U''_2, U''_3, \dots, U''_{n-1}]$$

تبصره ۱، ۳. با توجه به اعمال تبدیل فازی $u(x)$ به توابع $u_1(x) = u(x+h)$ و $u_2(x) = u(x+2h)$ $2h$ جزء فازی آن ها را می توان با فرمول های زیر بدست آورد:

$$U_{2i} = U_{i+2} \quad i = 2: n-3, U_{2i} = U_{i+2} + O(h^2) \quad i = 1, n-2, U_{1i} = U_{i+1}$$

$$i = 2, \dots, n-2, U_{1i} = U_{i+1} + O(h^2) \quad i = 1$$

اثبات: برای $i = 2, \dots, n-3$

$$= \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u(x+2h) A_i(x) dx \quad \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u_2(x) A_i(x) dx \quad U2_i = \frac{\int_a^b U_2(x) A_i(x) dx}{\int_a^b A_i(x) dx} =$$

قرار دهید، $x+2h=s$ طوری که $x \rightarrow x_{i-1}, s \rightarrow x_{i+1}$ و وقتی که $x \rightarrow x_{i+1}, s \rightarrow x_{i+3}$ نتیجه می‌شود:

$$U2_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i+1}}^{x_{i+3}} u(s) A_i(s-2h) ds = \frac{1}{h} \int_{x_{i+1}}^{x_{i+3}} u(p) A_{i+2}(s) ds \Rightarrow U2_i = U_{i+2}$$

برای $i=1$

$$U2_1 = F_1[u(x+2h)] \frac{\int_a^b u(x+2h) A_1(x) dx}{\int_a^b A_1(x) dx} = \frac{2}{h} \int_{x_1}^{x_2} u(x+2h) A_1(x) dx$$

قرار دهید $x+2h=s$ وقتی $x \rightarrow x_1, s \rightarrow x_3$ و وقتی $x \rightarrow x_2, s \rightarrow x_4$ نتیجه می‌گیریم:

$$U2_1 = \frac{2}{h} \int_{x_1}^{x_2} u(s) A_1(s-2h) ds = \frac{2}{h} \int_{x_3}^{x_4} u(s) A_3(s) ds$$

با قاعده ذوزنقه‌ی داریم که:

$$U2_1 = \frac{2}{h} \left[\frac{h}{2} (u(x_4) A_3(x_4)) + (u(x_3) A_3(x_3)) + O(h^3) \right] = \\ = u(x_3) + O(h^2) (\because A_3(x_4) = 0) = U_3 + O(h^2)$$

$$U2_{n-2} = \frac{\int_{x_{n-3}}^{x_{n-2}} u(x+2h) A_{n-2}(x) dx}{\int_{x_{n-3}}^{x_{n-2}} A_{n-2}(x) dx} = \frac{2}{h} \int_{x_{n-3}}^{x_{n-2}} u(x+2h) A_{n-2}(x) dx, i=n-2$$

قرار دهید $x+2h=s$ وقتی $x \rightarrow x_{n-3}, s \rightarrow x_{n-1}$ و وقتی $x \rightarrow x_{n-2}, s \rightarrow x_n$ نتیجه می‌شود:

$$U2_{n-2} = \frac{2}{h} \int_{x_{n-1}}^{x_n} u(s) A_{n-2}(p-2h) dp = \frac{2}{h} \int_{x_{n-1}}^{x_n} u(p) A_n(p) dp$$

طبق قانون ذوزنقه داریم که:

$$U2_{n-2} \frac{2}{h} \left[\frac{h}{2} (u(x_n) A_n(x_n)) + (u(x_{n-1}) A_n(x_{n-1})) + O(h^3) \right] \\ = u(x_n) + O(h^2) (\because A_n(x_{n-1}) = 0) = U_n + O(h^2)$$

برای $i=1, \dots, n-2$ داریم:

$$U'_2 = \frac{1}{2h} [U_3 - U_1] + O(h^2), U'_3 = \frac{1}{2h} [U_4 - U_2] + O(h^2), \dots, U'_{n-2} \\ = \frac{1}{2h} [U_{n-1} - U_{n-3}] + O(h^2), U'_{n-1} = \frac{1}{2h} [U_n - U_{n-2}] + O(h^2)$$

شکل متریکس U'_i برای $i = 2, \dots, n$ به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} U'_2 \\ U'_3 \\ U'_4 \\ \vdots \\ U'_{n-2} \\ U'_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_{n-1} \\ U_n \end{bmatrix} \quad (8.3)$$

$$F_n[u] = [U_1, \dots, U_n]^T \text{ و } B_1 = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ طوری که}$$

به طور مشابه برای u'' برای $i = 1, \dots, n-2$ بدست می آوریم:

$$U'_2 = \frac{1}{h^2} [U_3 - 2U_2 + U_1] + O(h^2), U'_3 = \frac{1}{h^2} [U_4 - 2U_3 + U_2] + O(h^2),$$

$$U'_{n-2} = \frac{1}{h^2} [U_{n-1} - 2U_{n-2} + U_{n-3}] + O(h^2), U'_{n-1} = \frac{1}{h^2} [U_n - 2U_{n-1} + U_{n-2}] + O(h^2)$$

به طور معادل فرم متریکس به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} U''_2 \\ U''_3 \\ U''_4 \\ \vdots \\ U''_{n-2} \\ U''_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_{n-1} \\ U_n \end{bmatrix} \quad (9.3)$$

$$F_n[u] = [U_1, \dots, U_n]^T \text{ و } B_2 = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ طوری که}$$

مسأله (3.1) را در نظر بگیرید و تبدیل فازی را روی شرط اولیه و شرایط مرزی آن اعمال کنید.

$$F_n[u'' + tu'] = F_n[h(x, y)] \Rightarrow F_n[u''] + tF_n[u'] = F_n[h] (\because \text{ linearity of } F\text{-Transform})$$

$$\Rightarrow B_2 F_n[u] + tB_1 F_n[u] = F_n[h]$$

طوری که $F_n[h] = [F_2, \dots, F_{n-1}]$ تبدیل فازی. $h(x, y)$ برای حفظ ابعاد، دو جزء $F_n[h]$ کمتر

است. $u(x_1) = u_1$ و $u(x_n) = u_n$ بر اساس معادله (5.3)، (6.3) و (7.3) متریکسهای B_1 و B_2 را

به گونه‌ی گسترش می دهیم که به طور کامل مسأله (1.3) را نشان دهد.

$$B_1^c = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2^c = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & h \end{bmatrix}$$

در این بخش، وکتورهای $F_n[h]$ و $F_n[y]$ را به صورت زیر تکمیل می‌کنیم:

$$F_n^c[h] = \left[\frac{u_1}{h}, F_2, \dots, F_{n-1}, \frac{u_n}{h} \right]^T, F_n^c[u] = [u_1, u_1, \dots, u_n]^T$$

در نهایت مسأله (1.3) را می‌توان به عنوان یک سیستم معادله خطی به صورت زیر نشان داد:

$$((B_2^c + tB_1^c))F_n^c[u] = F_n^c[h] \quad (10.3)$$

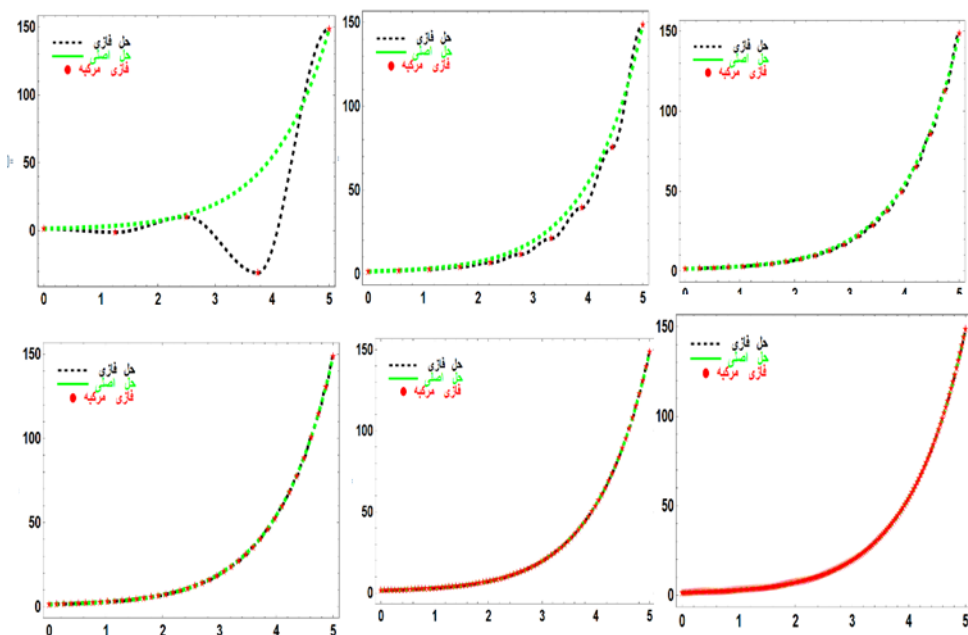
طوری که $F_n^c[u] = [U_1, \dots, U_n]^T$ سیستم معادله (10.3) را می‌توان با هر روش کارآمدی حل کرد تا $[U_1, \dots, U_n]^T$ بدست آید و سپس با استفاده از تبدیل فازی معکوس، جواب را به صورت یک تابع پیوسته قطعه‌ای به صورت زیر خواهد بود:

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^n U_i A_i(x) \quad (12.3)$$

مثال ۳، ۱: معادله دیفرانسیلی مرتبه دوم زیر را که از نوع مسأله شرایط سرحدی می‌باشد مد نظر می‌گیریم:

$$u''(x) - 2u'(x) = -u(x) + \sin(x),$$

$$u(0) = \frac{3}{2}, u(5) = \frac{\cos(5)}{2} + e^5, 0 \leq x \leq 5 \quad (13.3)$$



شکل ۸: منحنی حل تقریبی معادله (10.3) و مقایسه آن با حل دقیق به ترتیب از چپ به راست برای $n = 5, 10, 20, 40, 80, 160$ نقطه (مرکبه فازی) نشان می‌دهد

حل دقیق معادله فوق عبارت است از $u(x) = \frac{\cos(x)}{2} + e^x$ حل با استفاده از نرم افزار متمتیکا حل تقریبی ذریعه تبدیل فازی را بدست آورده و با حل دقیق مطابق شکل ۸ مقایسه می‌نماییم.

۴- حل عددی مسأله سرحدی منفرد مرتبه دوم ذریعه تبدیل فازی

در این بخش، کلاس معادلات مرتبه دوم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$u''(x) + \left(p + \frac{q}{t}\right)u'(x) = h(x, u(x)) \quad u'(0) = 0, \quad u(1) = 1 \quad (1.4)$$

که در آن $p, q \in \mathbb{R}$ و $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع متمادی قطعه‌یی نظر به x و شرط لپشیتز را نظر به $u(x)$ صدق نماید. در اینجا ما از پارتیشن فازی یک‌نواخت $[0, 1]$ استفاده می‌کنیم که $x_i = (i - 1)h, i = 1, 2, \dots, n, x_1 = 0, x_n = 1, h = \frac{1}{n-1}$

با استفاده از توسعه تیلور داریم که:

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} + O(h^2), \quad u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

قرار دهید $u_1 = u(x+h)$ و $u_2 = u(x-h)$ معادلات فوق به شکل‌های زیر تغییر می‌کند.

$$u'(x) = \frac{u_1 - u_2}{2h} + O(h^2), \quad u''(x) = \frac{u_1 - 2u + u_2}{h^2} + O(h^2)$$

با تطبیق تبدیل فازی در معادلات بالا نتیجه می‌شود که:

$$F_n[u''] = \frac{F_n[u_1] - 2F_n[u] + F_n[u_2]}{h^2} + O(h^2) \quad (2.4)$$

$$F_n[u'] = \frac{F_n[u_1] - F_n[u_2]}{2h} + O(h^2) \quad (3.4)$$

برای بردار تبدیل فازی $u_1(x), u(x), u'(x), u''(x)$ از نماد زیر استفاده می‌کنیم:

$$F_n[u'] = [U'_1, \dots, U'_n], F_n[u''] = [U''_1, \dots, U''_n], F_n[u] = [U_1, \dots, U_n], F_n[u_1]$$

$$= [U_{12}, \dots, U_{1n-1}], F_n[u_1] = [U_{12}, \dots, U_{1n-1}], F_n[u_2] = [U_{22}, U_{23}, \dots, U_{2n-1}]$$

با استفاده از (۳،۲) دریافت می‌کنیم که $U_{1i} = U_{i+1}$ برای $i = 2, \dots, n-2, U_{1n-1} = U_n$

برای $U_{2i} = U_{i-1}$ برای $i = 3, \dots, n-1$ و $U_{2i} = U_{i-1}$ برای $i = 2$. بنابراین،

از معادله (2.4) و (3.4) به دست می‌آوریم که برای $i = 2, \dots, n-1$

$$F_n[u''] = \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} + O(h^2), \quad F_n[u'] = \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} + O(h^2)$$

با نوشتن معادله فوق به صورت متریکس به این نتیجه می‌رسیم:

$$F_n[u''] = \begin{bmatrix} U''_2 \\ U''_3 \\ U''_4 \\ \vdots \\ U''_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{طوری که}$$

می‌شود که:

$$\begin{bmatrix} U'_2 \\ U'_3 \\ U'_4 \\ \vdots \\ U'_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$K_1 = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{طوری که}$$

اکنون تبدیل فازی را به معادله زیر از مسئله (1.4) اعمال می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
 u''(x) + \left(p + \frac{q}{t}\right) u'(x) &= h(x, u(x)) \Rightarrow F_n[u''(x)] + \left(p + \frac{q}{ih}\right) F_n[u'(x)] = F_n[h(x, u(x))] \\
 \Rightarrow K_2 F_n[u] + \left(p + \frac{q}{ih}\right) K_1 F_n[u] &= F_n[h(x, u)] \Rightarrow \left(K_2 + \left(p + \frac{q}{ih}\right) K_1\right) F_n[u] = F_n[h] \\
 &\text{با شرط مرزی مسأله (1.4) به دست می آوریم:}
 \end{aligned}$$

$$u'(0) = 0 \Rightarrow u'1 = 0 \Rightarrow \frac{u_2 - u_0}{2h} = 0 \Rightarrow u_2 = u_0$$

در اینجا u_0 یک نقطه اساسی است (Currenti Negro C. Coco, 2014).

$$u_1 = 1 \Rightarrow U_1 = 1 \Rightarrow -2U_1 = -2 \Rightarrow \frac{U_{n-1} - 2U_n}{h^2} = \frac{U_{n-1} - 2}{h^2}$$

برای $i = 1$ نتیجه می گیریم که:

$$U_1'' + \left(p + \frac{q}{h}\right) U_1' = F_1 \Rightarrow U_1'' = F_1 (\because U_1' = 0), \frac{U_2 - 2U_1 + U_0}{h^2} = F_1[h], \frac{2U_2 - 2U_1}{h^2} = F_1[h]$$

حال متریکس های K_1 و K_2 باید به گونه ای کامل باشند که بتواند معادلات (2.4)، (4.3) و (4.4) را نشان دهد.

$$\begin{aligned}
 K_1^c &= \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 K_2^c &= \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

به طور مشابه ما $F_n[h]$ را به صورت $F_n^c[h] = [F_1, F_2, \dots, F_{n-1}, \frac{U_{n-1}-2}{h^2}]$ تبدیل می کنیم در نهایت مسأله (1.4) را می توان به صورت یک سیستم معادله خطی به صورت زیر نشان داد:

$$\left(K_2^c + \left(p + \frac{q}{ih}\right) K_1^c\right) F_n^c[u] = F_n^c[h] \quad (5.4)$$

طوری که $F_n^c[u] = [U_1, \dots, U_n]^T$ را می توان با هر روش کارآمدی برای بدست آوردن $[U_1, \dots, U_n]^T$ و سپس با استفاده از فازی معکوس حل کرد.

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^n U_i A_i(x) \quad (6.4)$$

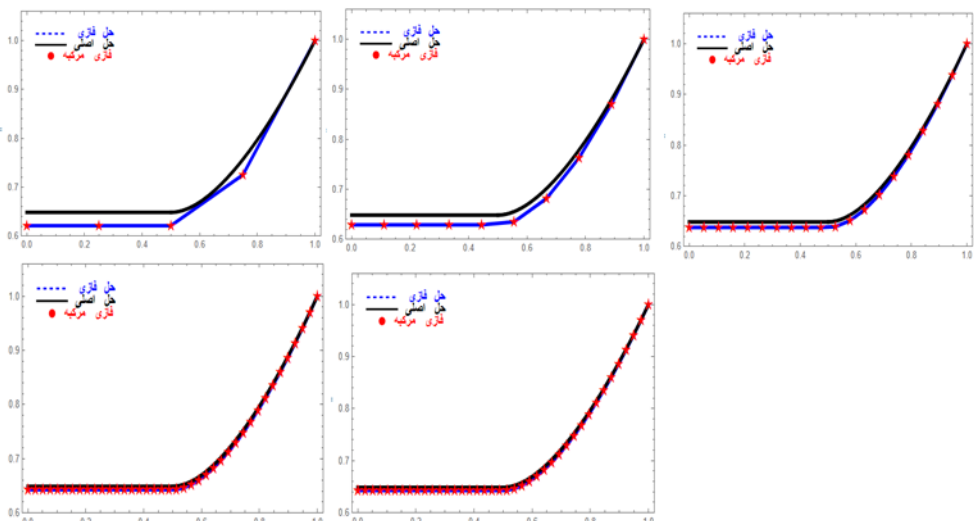
مثال 1.4: معادله دیفرانسیلی منفرد مرتبه دوم زیر را مد نظر بگیرید.

$$y''(t) + \frac{3}{t} y(t) = J_u \chi_{(\frac{1}{2}, 1]} \quad y'(0) = 0, y(1) = 1,$$

طوری که در آن $\chi_A = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A \\ 0 & \text{if } x \in A^c \end{cases}$ حل حقیقی معادله فوق عبارت است از

$$y(t) = 1 - \frac{9}{128} J_u + \left(-\frac{1}{16} + \frac{1}{128t^2} + \frac{t^2}{8} \right) J_u \chi_{(\frac{1}{2}, 1]}.$$

حال روش حل حاصل شده از بخش 4 را در نرم افزار ممتیکا مینویسم و حل تقریبی بدست آمده ذریعه تبدیل فازی را با حل دقیق طبق شکل 9 مقایسه می‌نمایم.



شکل ۹: منحنی حل تقریبی مثال ۱.۴ و مقایسه آن با حل دقیق به ترتیب از چپ به راست برای $n = 5, 10, 20, 40, 80$ نقطه (مرکبه فازی) نشان می‌دهد

۵- تقارب مسأله سرحدی منفرد مرتبه دوم ذریعه تبدیل فازی

در این بخش نیاز است تا روش‌های که در بخش‌های قبلی بدست آمده است تقارب آن اثبات گردد و از تقارب الگوریتم اطمینان حاصل گردد. قضیه زیر تقارب روش تبدیل فازی را برای مسائل مقدار مرزی مرتبه دوم اثبات می‌کند و در نتیجه تقارب روش‌های بررسی شده را اطمینان

می‌دهد (Jha, Verma, & Keyenat, 2019).

قضیه. مسأله (1.4) را در نظر بگیرید و فرض کنید $\frac{\partial h}{\partial u}$ وجود دارد یعنی $0 < \left(\frac{ph}{2} + \frac{q}{2(i-1)}\right) - 1$ و $0 < \left(\frac{ph}{2} + \frac{q}{2(i-1)}\right) - 1$ برای $i = 2(1)n$. فرض کنید $n \geq 2$ و یک پارتیشن فازی یک نواخت از $[0,1]$ با توابع عضویت $A_1, \dots, A_n$ با نقاط $(x_1 < x_2 < \dots < x_n)$ در نظر می گیریم که در آن $h = \frac{1}{n-1}$ سپس؛

$$\|E\|_{\infty} = O(h^2) \quad (1.5)$$

اثبات معادله $F_n^c[u] = F_n^c[h]$ را در نظر بگیرید، دو طرف معادله فوق را در $\left(K_2^c + \left(p + \frac{q}{ih} K_1^c\right)\right)$ ضرب می کنیم نتیجه می شود $h^2 - S = -h^2 \left(K_2^c + SF_n^c[u] - \bar{T} + h^2 F_n^c[h] = 0\right)$ که $S = -h^2 \left(K_2^c + \left(p + \frac{q}{ih} K_1^c\right)\right)$ و $\bar{T} = [T_1, \dots, T_n]$ خطای قطع است، در میابیم T_i برای $i = 1, \dots, n$ به طریقه زیر:

$$u_i'' + \left(p + \frac{q}{ih}\right) u_i' = h(x, u_i) \quad (8.4)$$

با گسسته سازی معادله فوق با استفاده از تبدیل فازی، معادله $-h^2$ را به دست می آوریم.

$$\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} + \frac{1}{12} h^2 U_i^{(iv)}(x) + O(h^4) + \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} + \left(p + \frac{q}{ih}\right) \frac{1}{6} h^2 U_i'''(x) + O(h^4) = F_i(h)$$

با جایگزینی مقدار معادله (8.4) در معادله (4.1) به دست می آوریم:

$$S \begin{bmatrix} U_1 - \bar{U}_1 \\ U_2 - \bar{U}_2 \\ \vdots \\ U_{n-1} - \bar{U}_{n-1} \\ U_n - \bar{U}_n \end{bmatrix} + h^2 \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial U_1}(U_1 - \bar{U}_1) \\ \frac{\partial F_2}{\partial U_2}(U_2 - \bar{U}_2) \\ \vdots \\ \frac{\partial F_{n-1}}{\partial U_{n-1}}(U_{n-1} - \bar{U}_{n-1}) \\ \frac{\partial F_{n-1}}{\partial U_{n-1}}(U_{n-1} - \bar{U}_{n-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{n-1} \\ T_n \end{bmatrix}$$

با جایگزینی $\varepsilon_j = F_n[u] - \bar{F}_n[u]$ به جای $j = 1, \dots, n$ معادله خطا را به صورت زیر بدست می آوریم:

$$S\varepsilon_j + h^2 \frac{\partial G_j}{\partial U_j} \varepsilon_j = \bar{T}_j \quad (9.4)$$

به صورت متریکسی می توان معادله فوق را به صورت نوشتاری نوشت:

$$NE = \bar{T} \quad (10.4)$$

طوری که $N = S + B, E = [\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n], \bar{T} = [T_1, \dots, T_n]^T$ و متریکس‌های S و B طوری زیر است:

$$B = h^2 \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial U_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_2}{\partial U_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial U_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial F_n}{\partial U_n} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$S = h^2 \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 + \left(\frac{ph}{2} + \frac{q}{4}\right) & 2 & -1 - \left(\frac{ph}{2} + \frac{q}{4}\right) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 + \left(\frac{ph}{2} + \frac{q}{2(n-1)}\right) & 2 & -1 - \left(\frac{ph}{2} + \frac{q}{2(n-1)}\right) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

برای اثبات این که متریکس $N = S + B$ غیر قابل تقلیل و یکنواخت است و همچنین $N \neq S$ از روش زیر استفاده می‌کنیم. متریکس S به صورت مورب غالب است:

$$-1 \pm \left(\frac{ph}{2} + \frac{q}{2(i-1)}\right) < 0 \Rightarrow \left(\frac{ph}{2} + \frac{q}{2(i-1)}\right) < 1 \text{ and } -1 < \left(\frac{ph}{2} + \frac{q}{2(i-1)}\right)$$

$$\Rightarrow \left| \left(\frac{ph}{2} + \frac{q}{2(i-1)}\right) \right| < 1 \Rightarrow \left| -1 + \left(\frac{ph}{2} + \frac{q}{2(i-1)}\right) \right| + \left| -1 - \left(\frac{ph}{2} + \frac{q}{2(i-1)}\right) \right|$$

$$\leq \left| -1 + \left(\frac{ph}{2} + \frac{q}{2(i-1)}\right) \right| \leq |-1| + \left| \left(\frac{ph}{2} + \frac{q}{2(i-1)}\right) \right| < 1 + 1 = 2$$

$$\Rightarrow |s_{i,i}| > \sum_{j=1, i \neq j}^b |s_{i,j}| \quad i = 1(1)n$$

همچنین S یک متریکس سه ضلعی است زیرا $s_{i,j} = 0$ برای $|i - j| > 1$ و $s_{i,i-1} \neq 0$ برای $i = 1(1)n - 1$ و $s_{i,i+1} \neq 0$ برای $i = 2(1)n$ و همچنین S دارای قطر غیر مثبت است و بنابراین، S یکنواخت است (Iyengar S.R.K. Jain R.K Jain, 2014). برای $j=1, \dots, n$ $\frac{\partial h_j}{\partial u_j} \geq 0$.

بنابراین با تعریف تبدیل فازی $\frac{\partial G_j}{\partial u_j} \geq 0$ برای $j = 1, \dots, n$ ، به دست می‌آوریم که $B \geq 0 \Rightarrow N$

$$S + B \leq S$$

از آنجایی که B یک متریکس مورب با ورودی‌های مثبت است. بنابراین، $N = S + B$ نیز یک نواخت و $N \leq S$ است. با خاصیت متریکس یک نواخت، دریافت می‌کنیم $0 < N^{-1} \leq S^{-1}$ از

$$E = N^{-1} \bar{T} \text{ بدست می‌آوریم (۵، ۱، ۲۹)}$$

$$\|E\|_{\infty} \leq \|N^{-1}\|_{\infty} \|\bar{T}\|_{\infty} \leq \|S^{-1}\|_{\infty} \| \bar{T} \|_{\infty} \quad (5.2)$$

بحث و مناقشه

یافته‌های این تحقیق به صورت مستقیم با هدف اصلی آن، یعنی بررسی کارایی تبدیل فازی در حل عددی معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم، هم‌راستا بوده و نشان می‌دهد که این روش توانسته است مسائل مقدار اولیه، سرحدی و منفرد را با دقت و پایداری مطلوب حل نماید. نتایج به دست آمده بیانگر آن است که تبدیل فازی به خوبی توانسته خلأ موجود در روش‌های کلاسیکی را در ساده‌سازی و افزایش کارایی محاسباتی برطرف سازد. بنابراین، می‌توان گفت که اهداف تحقیق به طور موفقانه تحقق یافته و این روش به عنوان یک رویکرد مؤثر در حل عددی معادلات دیفرانسیل قابل توصیه است (Perfilieva, 2008 & Chaldeevea; Perfilieva, 2006; Keyenat, 2019 & Jha, Verma)

یافته‌های این تحقیق نشان می‌دهد که دقت و پایداری بالای روش تبدیل فازی ناشی از انتقال معادلات دیفرانسیل داده شده به فضای وکتوری بعد متناهی است که باعث کاهش پیچیدگی محاسبات و کنترل بهتر خطا می‌گردد. همچنین، کارایی این روش در حل مسائل خطی، غیرخطی و منفرد را می‌توان به انعطاف‌پذیری الگوریتم‌های مبتنی بر تبدیل فازی و استفاده از تبدیل معکوس برای بازسازی جواب تقریبی نسبت داد. علاوه بر این، بررسی و اثبات تقارب روش در بخش ۵ ام این مقاله بیانگر اعتبار تحلیلی آن بوده و نشان می‌دهد که نتایج به دست آمده تنها تجربی نبوده، بلکه بر پایه تحلیل ریاضی قابل اعتماد است. (Kreinovich, 2011 & Perfilieva)

نتیجه‌گیری

در این مقاله، از روش تبدیل فازی به عنوان یک ابزار ریاضی نوین برای معرفی یک الگوریتم عددی جدید جهت حل معادلات دیفرانسیل، به ویژه مسائل مقدار سرحدی مرتبه دوم، استفاده شده است. نتایج حاصل با استفاده از نرم‌افزار Mathematica شبیه‌سازی شده‌اند.

ما با اعمال مستقیم تبدیل فازی بر هر دو طرف معادله دیفرانسیل و شرایط سرحدی آن شروع می‌کنیم؛ که این کار مسأله را به یک دستگاه معادلات خطی یا غیرخطی تبدیل می‌کند که می‌توان آن را با هر روش مؤثر و کارآمدی حل کرد تا مؤلفه‌های فازی به دست آید. سپس راه حل عددی جبری به دست آمده به فضای اصلی بازگردانده می‌شود که در نهایت منجر به به دست آوردن یک جواب متمم می‌گردد.

شایان ذکر است که در اینجا ما از تقریب مرتبه اول و دوم با استفاده از روش تفاضل متناهی با درجات دقت مختلف استفاده کرده‌ایم. می‌توان مرتبه را افزایش داد، اما باید به خاطر داشت که لازم است ترکیبی از الگوریتم‌های ذکر شده استفاده شود تا با تعداد نقاط کمتر، نتایج دقیق‌تری حاصل شود.

ما نتایج را با استفاده از توابع عضویت مثلثی و سینوسی و با تقسیم‌بندی فازی یکنواخت به دست آورده‌ایم. همان‌طور که در مثال‌های عددی در تمامی بخش مشاهده می‌شود، نتایج حاصل از توابع اساسی مثلثی دقیق‌تر و با خطای کمتری نسبت به توابع عضویت سینوسی هستند؛ که این نشان می‌دهد ساختار توابع اساسی می‌تواند بر میزان خطا تأثیر بگذارد.

در تحقیقات آینده میتود تبدیل فازی برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم با نظریه اغتشاش (Perturbation theory) مقایسه خواهیم نمود.

پیشنهاد می‌شود در تحقیقات آینده، روش تبدیل فازی برای حل انواع گسترده‌تری از معادلات دیفرانسیل، از جمله معادلات با مشتقات قسمی و مسائل مقدار اولیه بلند مرتبه، مورد بررسی قرار گیرد. همچنین مقایسه کارایی این روش با سایر روش‌های عددی شناخته شده می‌تواند به روشن شدن مزایا و محدودیت‌های آن کمک نماید. بررسی تأثیر استفاده از توابع عضویت مختلف بر دقت نتایج نیز می‌تواند موضوع تحقیقات بعدی باشد. علاوه بر این، مطالعه افزایش مرتبه تقریب در روش تفاضل متناهی و ترکیب آن با سایر الگوریتم‌های عددی می‌تواند به بهبود دقت محاسبات منجر شود. در نهایت، مقایسه این روش با نظریه اغتشاش (Perturbation theory) در حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم می‌تواند زمینه‌ای مناسب برای تحقیقات آینده فراهم سازد.

سپاسگزاری

نویسنده این مقاله مراتب سپاس و قدردانی خویش را از تمامی استادان، مشاوران، همکاران علمی و اشتراک‌کنندگان در تحقیق که با رهنمودها، همکاری‌ها و مساعدت‌های خویش در بهبود و تکمیل این مقاله سهم گرفته‌اند، ابراز می‌دارد. همچنان از پوهنتون کابل و معاونیت محترم تحقیقات که زمینه انجام این تحقیق را فراهم ساخته‌اند، صمیمانه تشکر و امتنان به عمل می‌آید.

سهم نویسندگان

در این قسمت سهم هر نویسنده در هر قسمتی از مقاله باید توضیح گردد.

تضاد منافع

در این قسمت تصدیق گردد که هیچ‌گونه تضاد منافع بین نویسندگان وجود ندارد.

- Butcher, J. C. (2003). *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. Wiley online library. <https://doi.org/978-0-471-96758-3>
- Chaldeeva E. Perfilieva, I. (2008). Fuzzy transform in the analysis of data. *International Journal of Approximate Reasoning*.
<https://doi.org/10.1016/j.ijar.2007.06.003>
- Chen, T. P. (2001). *Introduction to Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, and Fuzzy Control Systems*. Applied Mechanics Reviews .
<https://doi.org/10.1115/1.1421114>
- Currenti Negro C. Coco, A. (2014). A Second Order Finite-Difference Ghost-Point Method for Elasticity Problems on Unbounded Domains with Applications to Volcanology. *Communications in Computational Physics*, 16(4), 983-1009. <https://doi.org/10.4208/cicp.210713.010414a>
- Di Martino, F. L. (2010). Fuzzy Transforms for Compression and Decompression of Colour Videos. *Information Sciences*, 180, 3914-3931. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ins.2010.06.030>
- Dvorak A Perfilieva I, N. V. (2008). Fuzzy transform in the analysis of data. *International Journal of Approximate Reasoning*, 48(1), 36-46.
<https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ijar.2007.06.003>
- Iyengar S.R.K. Jain R.K Jain, M. (2014). *Numerical methods for scientific and engineering*. New Age International Publication.
- Jha G.j Verma A.K., K. S. (2019). A note on the convergence of fuzzy transformed finite difference methods. *Journal of Applied Mathematics and Computing*. <https://doi.org/10.1007/s12190-019-01312-8>
- Martino., V. L. (2009). A segmentation method for images compressed by fuzzy transforms. *Fuzzy Sets and Systems*, 161(1), 56-74.
<https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.fss.2009.08.002>
- Penney, C. H. (2015). *differential equations and boundary value problems*. Pearson. <https://doi.org/https://dl.konkur.in/post/Book/Paye/Differential->

[Equations-and-Boundary-Value-Problems-Edwards-5th-Edition-%5Bkonkur.in%5D.pdf](#)

- Perfileieva, I. (2006). Fuzzy transforms: Theory and applications. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(8), 993-1023.
<https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.fss.2005.11.012>
- Perfileieva, I. C. (2001). Fuzzy transformation and its applications. *Japan Seminar on Data Analysis and Decision Making under Uncertainty*, pp.116–124(2001. <https://utia.cas.cz/cs/news/3788/>
- Perfileieva, I., & Kreinovich, V. (2011). Fuzzy transforms of higher order approximate derivatives: a theorem. *Fuzzy sets and systems*, 180(1), 55-68. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.fss.2011.05.005>
- Perfileieva, I., Danková, M., & Bede, B. (2011). Towards a higher degree f-transform. *Fuzzy Sets Syst.*, 180(1), 3-19.
<https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.fss.2010.11.002>
- Perfiliva, I., Demicco, R. V., & Klir, G. J. (2004). *Fuzzy logic in geology*. Academic Press, Burlington.
<https://doi.org/https://books.google.com.af/books?id=BwZUQ-Vz1sUC&printsec=copyright#v=onepage&q&f=false>
- R.L.Burden, J. (2013). *Numerical analysis*. CENGAGE learning.
- R.Valasek I.perfileieva, P. (2017). F-transform-based shooting method for nonlinear boundary value problems. *Soft Computing*, 21(13), 1-10.
<https://doi.org/10.1007/s00500-017-2543-5>
- Stepnicka, M., & Valásek, R. (2004). Fuzzy transforms and their application on wave equation. *Electrical Engineering*, 7, 55.
https://doi.org/https://www.researchgate.net/publication/265358007_Fuzzy_transforms_and_their_application_to_wave_equation
- Stepnicka, M., & Valásek, R. (2005). .: Numerical solution of partial differential equations with help of fuzzy. *The 14th IEEE International Conference on Fuzzy Systems*.
- V.Novak I. Perfileieva, A. (2016). Insight in to fuzzy modeling. wiley online library. <https://doi.org/10.1002/9781119193210.index>
- Val'ašek., I. P. (2004). Fuzzy Transforms in Removing Noise. *Computational Intelligence, Theory and Applications*. Dortmund, Germany,:

Computational Intelligence, Theory and Applications.

https://doi.org/10.1007/3-540-31182-3_19

Vilum.Novak, I, p., & A, D. (2016). *Insight in to fuzzy modelling*. wiley.

Wei Chen, Y. S. (2014). *Approximate solution for a class of second-order ordinary differential equations by the fuzzy transform*. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems 27(1):73-82. <https://doi.org/10.3233/IFS-130979>

Zeinali, M., Alikhani, R., Shahmorad, S., Bahrami, F., & Perfilieva, I. (2018). On the structural properties of. *Fuzzy set and systems*, 342, 32-52. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.fss.2017.12.008>