د کابل پوهنتون د طبیعي علومو علمي- څېړنیزه مجله
مجله علمی-تحقیقی علوم طبیعی پوهنتون کابل
Journal of Natural Sciences
Kabul University
e-ISSN: 3078-6665
P-ISSN: 3078-5561

د مشتق وړ حسابي- هارمونیکي محدبو تابع ګانو لپاره د ځینو نویو غیر مساواتو ښې شوې بڼې

فیض محمد همت[۱]، عبدالوکیل بیدار[۲]، نورالله نوري[۳]

[۱،۲]ریاضي انالیز څانګه، ریاضیاتو پوهنځی، کابل پوهنتون، کابل، افغانستان
[۳]عمومي ریاضیاتو څانګه، ریاضیاتو پوهنځی، کابل پوهنتون، کابل، افغانستان
ایمیل: faizmuhammad012012@gmail.com

لنډیز

په دې څېړنه کې زموږ موخه دا ده چې د مشتق وړ تابعګانو لپاره د کلاسیکو انټیګرالي غیرمساواتونو ښې شوې بڼې وړاندې کړو، په دې شرط چې دا تابعګانې د حسابي–هارمونیکي محدبیت ځانګړتیا ولري. د دې هدف لپاره د هولډر د انټیګرالي غیرمساوات له تعمیم شوې بڼې او د هولډر–ایشچن غیرمساوات څخه استفاده شوې ده، تر څو د داسې تابعګانو لپاره نوي او تعمیم شوي غیرمساواتونه ترلاسه شي. دغه پایلې د انټیګرالونو د محاسبې د خطا د سرحدونو په ټاکلو کې مهم رول لري او د پخوانیو غیرمساواتو د خطا حدود هم راکموي. سربېره پر دې، د پایلو د تطبیقي ارزښت د ښودلو لپاره ترلاسه شوې غیرمساواتونه د ځینو مهمو ریاضیکي اوسطونو لکه حسابي، هارمونیکي او لوګارتمي اوسط لپاره تطبیق شوي دي. دا تطبیقات ښیي چې وړاندې شوې پایلې نه یوازې نظري ارزښت لري، بلکې د راتلونکو تحلیلي او تطبیقي څېړنو لپاره هم اغېزمن بنسټ برابروي.

کلیدي کلیمې محدبیت ؛ هارمونیکي محدبه تابع ؛ حسابي – هارمونیکي محدبه تابع ؛ هرمیټ- هادامارډ غیرمساوات ؛ هولډر غیرمساوات

Refinements of Some New Inequalities for Differentiable Arithmetic – Harmonically Convex Functions

Faiz Muhammad Hemat [1*], Abdul Wakil Baidar [2], Noorullah Noori[3]

[1,2]Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics, Kabul University, Kabul, Af
[3]Department of General Mathematical, Faculty of Mathematics, Kabul University, Kabul, Af
Email: faizmuhammad012012@gmail.com

Abstract

This study aims to derive improved forms of classical integral inequalities for differentiable functions possessing the property of arithmetic–harmonic convexity. To achieve this objective, a generalized version of Hölder’s integral inequality together with the Hölder–İşcan inequality is used to establish new inequalities for such functions. These results play an important role in determining bounds for errors arising in the approximation of integrals. The obtained inequalities not only reduce the error bounds associated with previously known integral inequalities but also provide a framework for deeper mathematical analysis of certain convex functions. Furthermore, to demonstrate the applicability of the theoretical results, the derived inequalities are applied to several mathematical means, including the arithmetic, harmonic, and logarithmic means. These applications demonstrate that the results presented here have both theoretical significance and practical usefulness, providing a basis for further analytical and applied research on integral inequalities.

Keywords Convexity; Harmonically Convex Function; Arithmetic–Harmonically Convex Function; Hermite–Hadamard Inequality; Hölder Inequality

ارجاع: همت ف. م.، بیدار ع.، & نوری ن. د مشتق وړ حسابي- هارمونیکي محدبو تابع ګانو لپاره د ځینو نویو غیر مساواتو ښې شوې بڼې. مجله علمی- تحقیقی علوم طبیعی پوهنتون کابل، ۸(۴)، ۲۱۳–۲۳۶. https://doi.org/10.62810/jns.v8i4.456

سریزه

الحمد لله رب العالمين و الصلوة و السلام على سيد المرسلين و على آله و أصحابه أجمعين.

د محدبیت نظریه په تېرو څو لسیزو کې د نظري او تطبیقي علومو په بېلابېلو برخو لکه ریاضیات، فزیک، اقتصاد او انجنیري کې د یوې بنسټیزې او تحلیلي وسیلې په توګه راڅرګنده شوې ده، چې له لارې یې ګڼ مهم مفاهیم او غیرمساواتونه تحلیل او څېړل شوي دي (Işcan, 2019; Kashuri et al., 2022). د تابع ګانو د ښه تحلیل په موخه څېړونکو د تابع ګانو مختلف کلاسونه را منځته کړي دي. د دې کلاسونو ډېری یې د تحدب د ځانګړني په مرسته بیان شوي دي. بیا د علمي اړتیاوو او بېلابېلو مسایلو د حل لپاره د ګڼو تعمیمي میتودونو په پر بنسټ بیان شویو کلاسونو ته پراختیا ورکړل شوې ده (Baidar et al., 2023). د کلاسونو بیان د نورو ګڼو ترڅنګ دې ته لاره هواره کړې ده، چې د مختلفو تابع ګانو لپاره انټیګرالي غیرمساواتونه تشکیل او د تخمیني انټیګرالونو د خطاء د سرحدونو په معلوموکې مرسته وکړي (Baidar & Kunt, 2023; Işcan, 2019). دې کار نه یوازې د ریاضیکي غیر مساواتو په برخه کې نوي لید لوري رامنځته کړي دي، بلکې د محدبو تابع ګانو د نظریې د قوت، کاروني او پراختیا لامل هم ګرځېدلی دی. په دې اړه د ترسره شویو کارونو لپاره (Gordji et al., 2014; Hezenci & Budak 2023; Zhang & Qi, 2014, Baidar & Kunt, 2024) ته مراجعه وکړئ. سربیره پردې د انټیګرالي نامساوي ګانو د تشکیل او مطالعې لپاره هم د تحدب له مفهوم څخه ګټه اخیستل کېږي. د تابع ګانو د تحدب مفهوم د تحلیل لپاره اسانه لار د مشتق د مفهوم کارونه ده. خو ځینې تابع ګانې شتون لري، چې په ځینو نقطو کې مشتق نه لري او د دې ډول تابع ګانو د تحدب مطالعه د مشتق په مرسته ستونزمنه کوي. د دې کار لپاره بدیله لاره د لاندې انټیګرالي غیرمساواتو کارونه ده، چې د غیرمساواتو د نوې تیوری بنسټیز مفاهیم ګڼل کېږي. د دې نامساوي ګانو له ډلې یوه یې په ۱۸۸۳ م کال کې د هر میټ له خوا په لاندې ډول بیان شوې ده:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{a-b}\int_a^b f(x)dx\,, \qquad a,b \in I \quad a<b \qquad (۱)$$

وریسې هاډامارډ بیا په ۱۸۹۶ م کال د محدبیت د مفهوم د تشریح لپاره لاندې نامساوي بیان کړه.

$$\frac{1}{a-b}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \qquad (۲)$$

د دغو دوو غیرمساواتونو ګډه بڼه بیا په دې شکل لیکل کېږي.

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{a-b}\int_a^b f(x)dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2}, \qquad (۳)$$

چې یاده نامساوي په ریاضیاتو کې معمولاً د هرمیټ- هادامارډ د نامساوي په نوم یادېږي (Zhang & Qi, 2014; Dragomir & Pearce, 2003).

(۳) غیرمساوات د یوې متمادي محدبې تابع یا مقعرې تابع د متوسط قیمت د اټکل لپاره یو اسان تقریبي چوکاټ وړاندې کوي. په دې وروستیو کلونو کې د دې نامساوي په مرسته مختلفې انټیګرالي نامساوي ګانې وړاندې شوي دي، چې د انټیګرالونو د تخمین د خطاء د سرحدونو په ټاکلو کې ورنه ګټه اخیستل کېږي (Kadakal & Bekar, 2019; Dragomir & Agarwal, 1998; Baidar et al., 2023).

د انټیګرالي نامساوي ګانو په نوې تیوری کې د نامساوي ګانو د تشکیل لپاره د تحدب پر مفهوم سربېره د هولډر له لاندې کلاسیک انټیګرالي نامساوي نه هم ګټه اخیستل کېږي (Maden et al., 2017).

$$\int_a^b |f.g|dx \le \left(\int_a^b |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}, \qquad (۴)$$

داسې چې $1 = \frac{1}{q} + \frac{1}{p}$ دی.

په ۲۰۱۹ م کال کې امداد ایشچن (İşcan, 2019) د (۴) غیرمساوات یوه ښه شوې بڼه په لاندې ډول بیان کړه:

$$\int_a^b |f.g|dx \le \frac{1}{b-a}\begin{bmatrix} \left(\int_a^b (b-x)|f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b (b-x)|g|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \\ + \left(\int_a^b (x-a)|f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b (x-a)|g|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \end{bmatrix}, \qquad (۵)$$

داسې چې $1 = \frac{1}{q} + \frac{1}{p}$ دی.

په ۲۰۲۳ میلادي کال کې کرماچي (Kırmacı, 2023) د هولډر کلاسیک انټیګرالي غیرمساوات یوه نوې او تعمیم شوې بڼه ترلاسه کړه، ترڅو د دې غیرمساواتو د کارونې ساحه نوره هم پراخه کړي. دا نوې بڼه د پخواني غیر مساوات محدودیتونه کموي او د تابع ګانو د یوه پراخه ټولګي او مختلفو انټیګرالي شرایطو لپاره تعمیم شوې بڼه ده، چې د ریاضیاتو په مختلفو برخو کې د ارزښتناکو او دقیقو اټکلونو زمینه برابروي؛ د یادې نامساوي بیان په دې ډول دی:

که $p_i > 0, s \ge 1$ او $\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{sp_i} = 1$ وي ، نو لیکلای شو

$$\int_a^b \left(\prod_{i=1}^{m} f_i(x)\right)^{\frac{1}{s}} dx \le \prod_{i=1}^{m}\left(\int_a^b f_i^{p_i}(x)\ dx\right)^{\frac{1}{sp_i}}, \qquad (٦)$$

د محدبو تابع گانو د مختلفو کلاسونو لپاره د انـتیګرالي نامساوي ګانو دتشکیل نويو میتودونو ته په کتو په (Maden et al., 2017) څېړنیزه مقاله کې ځیني نوې انتیګرالي نامساوي ګاني په لاندې ډول بیان شوې دي.

۱. قضیه: فرض کړئ چې $f: I \subseteq R \longrightarrow R$ د $n \in N$ لپاره په I^0 باندې n- ځلې مشتق وړ میپنګ او $a , b \in I^0 , a < b , f^{(n)} \in L[a,b]$ وي، نو د

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left(\frac{f^{(k)}(b)b^{k+1}-f^{(k)}(a)a^{k+1}}{(k+1)!}\right)-\int_a^b f(x)dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\int_a^b x^n f^{(n)}(x)dx ,$$

مساوات صدق کوي (Maden et al., 2017).

۲. قضیه: فرض کړئ، چې $f: I \subseteq (0,\infty) \longrightarrow R$ د $n \in N$ لپاره په I^0 باندې n- ځلې مشتق وړ تابع او $a , b \in I^0 , a < b$ وي. په دې صورت کې که $f^{(n)} \in L[a,b]$ او د $q \ge 1$ لپاره $|f^{(n)}|^q$ په $[a , b]$ باندې محدبه تابع وي، نو د

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left(\frac{f^{(k)}(b)b^{k+1}-f^{(k)}(a)a^{k+1}}{(k+1)!}\right)-\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{1}{n!}(b-a)L_{np}^{n}(a,b)A^{\frac{1}{q}}\left(\left|f^{(n)}(a)\right|^q,\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right).$$

غیرمساوات صدق کوي (Maden et al., 2017).

۳. قضیه: فرض کړئ، چې $f: I \subseteq (0,\infty) \longrightarrow R$ د $n \in N$ لپاره په I^0 باندې n- ځلې مشتق وړ تابع او $a , b \in I^0 , a < b$ وي. په دې صورت کې که $f^{(n)} \in L[a,b]$ او د $q > 1$ لپاره $|f^{(n)}|^q$ په $[a , b]$ باندې محدبه تابع وي، نو د

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left(\frac{f^{(k)}(b)b^{k+1}-f^{(k)}(a)a^{k+1}}{(k+1)!}\right)-\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{1}{n!}(b-a)^{\frac{1}{p}}\left\{\left|f^{(n)}(b)\right|^q\left[L_{nq+1}^{nq+1}(a,b)-aL_{nq}^{nq}(a,b)\right] + \left|f^{(n)}(a)\right|^q\left[bL_{nq}^{nq}(a,b)-L_{nq+1}^{nq+1}(a,b)\right]\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

غیرمساوات صدق کوي (Maden et al., 2017).

۴. قضیه: فرض کړئ، چې $f: I \subset (0,\infty) \longrightarrow R$ د $n \in N$ لپاره په I^0 باندې n- ځلي مشتق وړ تابع او $a < b$ ، $a\,, b \in I^0$ وي. په دې صورت کې که $f^{(n)} \in L[a,b]$ او د $q > 1$ لپاره $\left| f^{(n)} \right|^q$ په $[a\,, b]$ باندې محدبه تابع وي، نو د

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left(\frac{f^{(k)}(b) b^{k+1} - f^{(k)}(a) a^{k+1}}{(k+1)!} \right) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{b-a}{n!} L_{np}^n(a,b) \left| f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|.$$

غیرمساوات صدق کوي (Maden et al., 2017).

دې ته ورته د لاندې عینیت

$$I_f(a,b) = (f(b)b - f(a)a) - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b x f'(x)\,dx, \qquad (۷)$$

په مرسته د مشتق وړ حسابي ـ هارمونیکي محدبو تابع ګانو د انتیګرالونو د خطاء سرحدونو د ټاکلو لپاره ځیني نوري نوې نامساوي ګانې ترلاسه شوي دي (Kadakal et al., 2025; Maden et al., 2017; Wu, 2005) ، چې د دې نامساوي ګانو له ډلې یې ځیني په لاندې ډول دي.

۵.قضیه: که $K_x = |f'(x)|$ وي او فرض کړو، چې $f: I \subset (0,+\infty) \longrightarrow (0,+\infty)$ په I^0 باندې یو د مشتق وړ مپینګ او $b > a$ ، $a, b \in I^0$ وي. په دې صورت کې که $|f'|$ په $[a, b]$ انټروال باندې یوه حسابي ـ هارمونیکي محدبه تابع وي، نو د

$$\left| I_f(a,b) \right| \leq \begin{cases} \frac{(b-a)G^2(K_a,K_b)}{K_b-K_a} \left(\frac{bK_b - aK_a}{L(K_a\,,K_b)} - (b-a) \right), & K_a \neq K_b \\ (b-a)K_b A(a,b). & K_a = K_b \end{cases}$$

غیرمساوات صدق کوي (Kadakal, et al.,2025).

٦. قضیه: که $K_x = |f'(x)|$ وي او فرض کړو، چې $f: I \subset (0,+\infty) \longrightarrow (0,+\infty)$ په I^0 باندې یو د مشتق وړ مپینګ او $b > a$ ، $a, b \in I^0$ وي. په دې صورت کې که $|f'|^q$ په $[a, b]$ انټروال باندې یوه حسابي ـ هارمونیکي محدبه تابع او $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ وي، نو د

$$\left| I_f(a,b) \right| \leq \begin{cases} \dfrac{(b-a)L_p(a,b)G^2(K_a\,,K_b)}{L(K_a - K_b)L_{q-1}^{q-1}(K_a\,,K_b)^{\frac{1}{q}}}\,, & K_a \neq K_b \\ (b-a)K_b L_p(a,b)\,. & K_a = K_b \end{cases}$$

غیرمساوات صدق کوي (Kadakal, et al.,2025).

۷. قضیه: که $K_x = |f'(x)|$ وي او فرض کړو، چې $f: I \subset (0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$ په I^0 باندې یو د مشتق وړ مپینګ او $a, b \in I^0$, $b > a$ وي. په دې صورت کې که $q \geq 1$, $|f'|^q$ په $[a, b]$ انټروال باندې یوه حسابي ـ هارمونیکي محدبه تابع وي، نو د

$$|I_f(a,b)| \leq$$
$$\begin{cases} \frac{(b-a)A^{1-\frac{1}{q}}(a,b)G^2(K_a,K_b)}{(K_b^q-K_a^q)^{\frac{1}{q}}}\left(\frac{bK_b^q-aK_a^q}{L(K_a,K_b)L_{q-1}^{q-1}(K_a,K_b)}-(b-a)\right)^{\frac{1}{q}}, & K_a \neq K_b \\ (b-a)K_b A(a,b). & K_a = K_b \end{cases}$$

غیرمساوات صدق کوي (Kadakal, et al.,2025).

سره له دې چې په تېرو دوو لسیزو کې د تقریبي انټګرالونو د خطا دحدونو د اټکل لپاره ګڼ شمېر تحلیلي طریقې او غیرمساواتونه وړاندې شوي، خو لا هم د دغو میتودونو په مرسته د دقیقو او غوره خطاء حدونو ټاکنه په بشپړه توګه نه ده ترسره شوې. په حقیقت کې د انټیګرالي نامساوي ګانو او د توابع د کلاس له بدلون سره د خطا حدود هم بدلیږي. دا څرګندوي چې لا هم د ځانګړو تابع‌ګانو لپاره د دقیقو خطاء حدونو د موندلو په برخه کې د څېړنې یو مهمه تشه شتون لري او اړتیا ده، چې په دې برخه کې لا ژورې نظري څېړنې ترسره شي. په دې څېړنه کې ستونزي ته په کتو سره د انټیګرالي نامساواتو د جوړښت د دقیق تحلیل په موخه د هولډر نامساواتو د هغو بڼو څخه چې په (Işcan, 2019) او (Kırmacı, 2023) مقالو کې بیان شوي دي، ګټه اخیستل کیږي. د ا څېړني تحلیلي شکل لري، چې اساسي موخه یې د نویو انټیګرالي نامساواتو د جوړېدو څرنګوالی او څېړل دي.

د دې هدف د ترلاسه کولو لپاره، په (Işcan, 2019) او (Kırmacı, 2023) مقالو کې وړاندې شوې نامساوات په (۷) عینیت باندې تطبیق کیږي، تر څو د مشتق وړ حسابي ـ هارمونیکي تابع ګانو لپاره نوي انټیګرالي غیرمساواتونه په لاس راشي. وروسته ترلاسه شوې پایلې د پخوانیو څېړنو له نتایجو سره پرتله کیږي، تر څو د کارونې د دقت او اغېزمنتیا اندازه یې وټاکل شي. لاس ته راغلې پایلې د قضایاو او پایلو په شکل بیانیږي.

لومړني مفاهیم

د اصلي پایلو د ترلاسه کولو لپاره لازمه ده، چې په دې برخه کې یو شمیر هغه اساسي مفاهیم چې د پایلو په ترلاسه کولو کې ورنه ګټه اخلو، په لنډ ډول له نظره تېر کړو.

۱- محدب سېټ

په R^n کې د S یو سېټ ته محدب سېټ وایي، که چیرې د S سېټ د هرو دوو نقطو p او q له وصل کېدو څخه لاسته راغلی مستقیم خط کاملا په S کې موقعیت ولري. دا په دې مانا چې د $\overline{pq}$ مستقیم خط نقطې د هر $t \in [0,1]$ لپاره د $tp + (1-t)q$ شکل لري، یعنې :

$[p, q] = \{(tp + (1-t)q\} : \lambda \in [0,1]\}$

یا په لنډه توګه ویلای شو، چې د $S \subseteq R$ سېټ ته محدب سېټ وایي، که چیرې د هر $x, y \in S$ او $t \in [0,1]$ لپاره $(1-t)x + ty \in S$ وي (Eftekhari, 2014) .

په اصل کې د حسابي محدبیت مفهوم په لومړي ځل په ۱۹۰۶ م کال کې د ډنمارکي ریاضي پوه جنسین (J.L.W.V.Jensen) له خوا معرفي شو. نوموړي دغه مفهوم د یو غیر مساوات په ډول چې د جنسن غیر مساوات (Jensen's inequality) په نوم یادېږي، وړاندې کړ. د یاد غیر مساوات ساده بڼه په لاندې ډول ده.

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

جنسن د $f: D \to R$ تابع د محدبیت لپاره دپورتني نامساوي رښتیاوالی کافي شرط بللی دی. د جنسن پورتنی نامساوات په مختلفو بڼو باندې تعمیم شوی او د محدبو تابع ګانو (Convex Functions) د پراخې کارونې لپاره پې زمینه برابره کړې ده، په دې اړه د لازیاتو معلوماتو لپاره (Baidar et al.,2023; Horvath et al., 2014) سرچینې او په یادو سرچینو کې ارجاع شوې سرچینې کتلای شئ.

۲- محدبه تابع

د $f: I = [a, b] \subset R \to R$ تابع ته محدبه تابع وایي، که چیرې د هر $x, y \in I = [a, b]$ او $\lambda \in [0,1]$ لپاره لاندې نامساوي

$$f[\lambda x + (1-\lambda)y] \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \qquad (۸)$$

صدق کړي. په پورتنې تعریف کې د I انټروال ممکن خلاص، نیمه تړلی، تړلی او همدارنګه کېدای شي محدود، نامحدود انټروال او یا حتی یوه نقطه وي، همدارنګه کېدای شي $\lambda \in (0,1)$ وي. که په پورتنې غیرمساوات کې $x \neq y$ وي، نو د f محدبې تابع ته دقیقا محدبه تابع وایي (Eftekhari, 2014) .

۳ـ هارمونيکي محدب سېټ

د $S \subset R_+$ سېټ ته هارمونيکي محدب سېټ وايي، که چېرې د هر $x, y \in S$ او د $t \in [0,1]$ لپاره $\frac{xy}{tx+(1-t)y} \in S$ وي، (Awan et al., 2020; Shi & Zhang, 2013).

۴ـ حسابي ـ هارمونيکي محدبه تابع

د $f: I \subset R \longrightarrow (0,\infty)$ يوې تابع ته د I په انټروال باندې حسابي ـ هارمونيکي محدبه تابع وايي، که چيرې د

$$f(tx+(1-t)y) \leq \frac{f(x)f(y)}{tf(y)+(1-t)f(x)},$$

غيرمساوات د $\forall\, x, y \in I$ او $t \in [0,1]$ له پاره صدق کړي (İşcan, 2014).

۵ـ هارمونيکي محدبه تابع

که $I \subset R\backslash\{0\}$ د حقيقي اعدادو يو انټروال وي، نو د $f: I \longrightarrow R$ تابع ته هارمونيکي محدبه تابع وايي، که چېرې د هر $x, y \in I$ او د $t \in [0,1]$ لپاره د

$$f\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right) \leq t\, f(y) + (1-t) f(x), \qquad (۹)$$

غيرمساوات صدق کړي. که چېرې د يادو شرايطو سره د f تابع لپاره د (۹) غيرمساوات علامه تغير وکړي، نو دې تابع ته مقعره هارمونيکي تابع وايي(İşcan, 2014) .

٦ـ د يانګ غيرمساوات

که $1 < p, q < \infty$ دوه حقيقي عددونه داسې چې $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ وي، نو د هر $a, b \in R$ لپاره لاندې نامساوي صدق کوي:

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}.$$

پورتنی غيرمساوات د يانګ غيرمساوات په نوم يادېږي(Kırmacı, 2023).

۷ـ د هولډر غيرمساوات

د هولډر غيرمساوات د کوشي شوارتز غيرمساواتو تعميم يافته شکل دی، چې په ۱۸۸۹ م کال کې د يوه جرمني عالم اوټو هولډر (Otto Hölder) له خوا معرفی شوی دی. د دې نامساوات د مجزا بڼې بيان په لاندې ډول دی:

که $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ او $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ حقیقي اعداد او $1 \le p < \infty$ ، $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ وي، نو په دې صورت کې لاندې نامساوات صدق کوي:

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i y_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \qquad i=1,2,3,\dots,n.$$

پورتنی غیرمساوات د هولډر غیرمساوات بلل کېږي (Kırmacı, 2023).

۸ـ د هولډر غیر مساوات انټیګرالي شکل

که د p او q عددونه دهولډر نامساوي د مجزابنې شرایط صدق کړي او د $f(x)$ او $g(x)$ تابع ګانې د $[a,b]$ په انټروال باندې د انټیګرال وړ وي، یعنې $\left(\int_a^b|f|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$ او $\left(\int_a^b|g|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} < \infty$ وي، نو په دې صورت کې لاندې نامساوي صدق کوي.

$$\int_a^b |fg| \le \left(\int_a^b |f|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

دې غیرمساوات ته د هولډر غیرمساوات انټیګرالي شکل وایي(Kırmacı, 2023).

۹. د مینوکوفسکي غیر مساوات

که $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ او $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ حقیقي اعداد او $1 \le p < \infty$ ، $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ وي، نو په دې صورت کې د

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

غیر مساوات صدق کوي او یاد غیرمساوات ته د مینوکوفسکي غیر مساوات غیرمساوات وایي(Kırmacı, 2023).

۱۰ـ د مینوکوفسکي غیرمساوات انټیګرالي شکل

که د $f(x)$ او $g(x)$ تابع ګانې د $[a,b]$ په انټروال باندې د انټیګرال وړ وي، یعنې $\left(\int_a^b|f|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$ او $\left(\int_a^b|g|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$ وي، نو په دې صورت کې د

$$\left(\int_a^b |f+g|\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |f|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

نامساوي صدق کوي (Kırmacı, 2023).

۱۱ـ د جنسن غیر مساوات

د جنسن نامساوات په ریاضیاتو کې د محدبیت (convexity) او د احتمالاتو تیوري (probability theory)اله بنسټیزو مفاهیمو څخه شمېرل کېږي. دا نامساوات د محدبو تابع ګانو او وزني اوسطونو (weighted means)ترمنځ یوه مهمه ریاضیکي اړیکه رامنځته کوي او د تابع د وسطي قېمتونو د تحلیل لپاره بنسټیز اصل ګڼل کېږي (Liao & Berg, 2019). د یاد نامساوات عمومي بڼه په لاندې ډول ده:

تعریف: که f د $I \subseteq R$ په انټروال باندې یوه محدبه تابع او

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in I$ د$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ وزني عددونه وي،

داسې چې $\lambda_i \ge 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ رابطې صدق کړي، نو په دې صورت کې لاندې نامساوات صدق کوي.

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

یا په بل عبارت که f یوه محدبه تابع او X یو تصادفي متحول وي، نو

$$f\big(E(X)\big) \le E\big(f(x)\big).$$

۱۲ـ Power - mean او د Power - mean نامساوات

تعریف: که $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ مثبت حقیقي عددونه او r یو حقیقي عدد وي، نو له r مرتبې لرونکی Power - mean (تعمیم یافته اوسط) داسې تعریفېږي (Wu, 2025).

$$M_r(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r\right)^{\frac{1}{r}}.$$

که $p, q \in R$ او $p < q$ وي، نو په دې صورت کې لاندې نامساوات صدق کوي،

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \Rightarrow M_p \le M_q.$$

دې غیرمساوات ته د The Power - mean Inequality وايي.

که چیرې $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n$ شي، نو پورتنی غیرمساوات په مساوات باندې بدلیږي (Wu, 2005).

۱۳ـ د Power – Mean انټیګرالي غیر مساوات

د Power – Mean انټېګرالي غیرمساوات د Power – Meanغیرمساواتو ته ورته دی. د اعدادو د یو محدود سېټ د اوسطونو د مقایسې پر ځای، په یو انټروال باندې د تابع ګانو د طاقت اوسطونه مقایسه کیږي، چې تعریف یې په لاندې ډول دی.

تعریف: که f د $[\,a\,,b]$ په انټروال باندې یوه مثبته او د اندازې وړ تابع او $r \in R$ وي، نو په دې صورت کې د $[\,a\,,b]$ په انټروال باندې د f تابع Power – Meanله r مرتبې سره عبارت دی له (Wu, 2005).

$$M_r(f) = \left(\frac{1}{a+b}\int_a^b [f(x)]^r dx\right)^{1/r}$$

د څېړنې مواد او کړنلارې

د څېړنیز میتود له پلوه دا څېړنه کیفي او تحلیلي بڼه لري او د ریاضیکي استدلالونو او تحلیلي میتودونو په چوکاټ کې ترسره شوې ده. د معلوماتو د راټولولو لپاره د موضوع د علمي مخینې له منظمې مطالعې څخه ګټه اخیستل شوې ده. په دې لړ کې د موضوع اړوند علمي مقالې، تخصصي کتابونه او پخوانۍ څېړنې د معلوماتو د بنسټیزو منابعو په توګه کارول شوي دي. د مطالعې ساحه هغه ریاضیکي جوړښتونه او اړیکې دي، چې د مشتق وړ توابعو د حسابي ــ هارمونیکي محدبیت او د هغوی اړوند انټیګرالي نامساوي ګانو سره تړاو لري. د معلوماتو د تجزیې او تحلیل لپاره تحلیلي او استنتاجي میتود کارول شوی، چې پکې د هولډر نامساوي تعمیم شوې بڼه او د هولډرــ ایشچن نامساوي د بنسټیزو ریاضیکي تخنیکونو په توګه کارول شوي دي. د همدې تحلیلي چوکاټ له لارې نوي انټیګرالي نامساوي ګانې استخراج او په منظم ډول ثبوت شوې دي او د ترلاسه شوو پایلو د اعتبار او کارېدنې د څرګندولو لپاره مناسبې تطبیقي بیلګې هم وړاندې شوې دي.

موندنې

بخش په دې برخه کې د مشتق وړ حساب‌ي هارمونيکو تابع ګانو لپاره په (۷) عينيت باندې په (Işcan, 2019) او (Kırmacı, 2023) څېړنيزو مقالو کې په ترتيب سره د هولډر نامساوي ښه شوې او تعميم شوې بڼې د تطبيق په پايله کې نوې نامساوي ګانې تشکيلوي. ورپسې ګورو، چې لاسته راغلي نامساواتونه د پخوانيو هغو سره چې د دياد عينيت په مرسته په مخکينيو څېړنو کې ترلاسه شوي ځه توپير لري.

۸. قضيه: که $K_x = |f'(x)|$ وي او فرض کړو، چې $f: I \subset (0,+\infty) \longrightarrow (0,+\infty)$ په I^0 باندې يو د مشتق وړ مپينګ او $a, b \in I^0$,$b > a$ وي. په دې صورت کې که $|f'|^q$ په $[a,b]$ انټروال باندې يوه حساب‌ي ـ هارمونيکي محدبه تابع او د $s \geq 1$ لپاره $sp, sq \in (1,\infty)$ ، $\frac{1}{sp} + \frac{1}{sq} = 1$ وي، نو د

$$|I_f(a,b)| \leq \begin{cases} \left(\dfrac{L_p(a,b)(b-a)^s K_a\, K_b}{\left(L(K_a\,, K_b)\,.\,L_{q-1}^{q-1}(K_a\,, K_b) \right)^{\frac{1}{q}}} \right)^{\frac{1}{s}}, & K_a \neq K_b \\ \left(\left(L_p(a,b) \right) (b-a)^s K_b \right)^{\frac{1}{s}}. & K_a = K_b \end{cases}$$

غيرمساوات صدق کوي.

ثبوت: فرض کړو، چې د $q \geq 1$ لپاره د $|f'|^q$ تابع په $[a,b]$ انټروال باندې يوه حساب‌ي ـ هارمونيکي محدبه تابع وي، نو

$$f(tx + (1-t)y) \leq \frac{f(x)f(y)}{tf(y) + (1-t)f(x)},$$

نامساوات صدق کوي. که په پورتني غير مساوات کې $t = \frac{b-x}{b-a}$ ، $1 - t = \frac{x-a}{b-a}$ او $x = a\,, y = b$ سره تعويض کړو، نو د هر $x \in [a,b]$ لپاره ليکلای شو چې:

$$f'(tx + (1-t)y) \leq \frac{f'(x)f'(y)}{tf'(y) + (1-t)f'(x)},$$

$$f'\left(\frac{b-x}{b-a}(a) + \left(\frac{x-a}{b-a}\right)(b)\right) \leq \frac{f'(a)f'(b)}{\frac{b-x}{b-a}f'(b) + \left(\frac{x-a}{b-a}\right)f'(a)},$$

$$f'\left(\frac{ab-ax+bx-ab}{b-a}\right) \leq \frac{f'(a)f'(b)}{\frac{f'(b)(b-x)+f'(a)(x-a)}{b-a}},$$

$$f'(x) \leq \frac{(b-a)f'(a)f'(b)}{f'(b)(b-x)+f'(a)(x-a)}\,. \tag{۱۰}$$

که (۱۰) غیرمساوات د دواړه خواوو مطلقه قیمت ونیسو، نو:

$$|f'(x)|^q \leq \frac{(b-a)K_a^q\,K_b^q}{(b-x)K_b^q+(x-a)\,K_a^q}. \tag{۱۱}$$

څرنگه چې $I_f(a,b)=\int_a^b x\,f'(x)dx$ دی، نو

$$|I_f(a,b)| \leq \int_a^b x\,|f'(x)|dx, \tag{۱۲}$$

ترلاسه کېږي. د هولډر د تعمیم شوي غیر مساوات څخه په گټه اخیستنې پورتنې (۱۱) غیرمساوات په لاندې ډول لیکو:

$$\left|I_f(a,b)\right| \leq \int_a^b (x\,.|f'|)^{\frac{1}{s}}\,dx \leq \left(\int_a^b x^p\,dx\right)^{\frac{1}{sp}}\left(\int_a^b |f'(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{sq}}$$

$$=\left[\frac{b^{p+1}-a^{1+p}}{p+1}\right]^{\frac{1}{sp}}\left(\int_a^b \frac{(b-a)K_a^q\,K_b^q}{(b-x)K_b^q+(x-a)\,K_a^q}dx\right)^{\frac{1}{sq}}$$

$$=\left[\frac{b^{p+1}-a^{1+p}}{(p+1)(b-a)}\right]^{\frac{1}{sp}}(b-a)^1(K_a\,K_b)^{\frac{1}{s}}\left(\int_a^b \frac{1}{(b-x)K_b^q+(x-a)\,K_a^q}dx\right)^{\frac{1}{sq}}$$

$$=\left(L_p(a,b)\right)^{\frac{1}{s}}(b-a)(K_a\,K_b)^{\frac{1}{s}}\left(\int_a^b \frac{1}{(b-x)K_b^q+(x-a)\,K_a^q}dx\right)^{\frac{1}{sq}}. \tag{۱۳}$$

د (۱۳) غیرمساوات لپاره لاندې دوه مختلف حالتونه په پام کې نیسو:

لومړی حالت: که $K_a=K_b$ وي، نو:

$$\left|I_f(a,b)\right| \leq \left(L_p(a,b)\right)^{\frac{1}{s}}(b-a)(K_a\,K_b)^{\frac{1}{s}}\left(\int_a^b \frac{1}{K_a^q((b-x)+(x-a))}dx\right)^{\frac{1}{sq}}$$

$$=\left(L_p(a,b)\right)^{\frac{1}{s}}(b-a)(K_a\,K_b)^{\frac{1}{s}}.\frac{1}{\left(K_a^q(b-a)\right)^{\frac{1}{sq}}}\left(\int_a^b dx\right)^{\frac{1}{sq}}$$

$$\left|I_f(a,b)\right| \le \left(\left(L_p(a,b)\right)(b-a)^s K_b\right)^{\frac{1}{s}}. \qquad (۱۴)$$

دویم حالت: که $K_a \neq K_b$ وي، نو:

$$\left|I_f(a,b)\right| \le \left(L_p(\,a,b)\right)^{\frac{1}{s}}(b-a)(K_a\,K_b)^{\frac{1}{s}}\left(\int_a^b \frac{1}{(b-x)K_b^q+(x-a)\,K_a^q}dx\right)^{\frac{1}{sq}}, \quad (۱۵)$$

که $u=(b-x)K_b^q+(x-a)\,K_a^q$ شي، نو:

$$u=(b-x)K_b^q+(x-a)\,K_a^q \Rightarrow du = -\left(K_b^q-K_a^q\right)dx$$

$$x=-\frac{u+aK_a^q-bK_b^q}{\left(K_b^q-K_a^q\right)} \Rightarrow dx=-\frac{du}{\left(K_b^q-K_a^q\right)}$$

$$x=a \Rightarrow u=(b-a)K_b^q \quad , \qquad x=b \Rightarrow u=(b-a)K_a^q$$

اوس په (۱۵) غیرمساوات کې پورتنی تعویض ترسره کوو په نتیجه کې په لاس راځي چې

$$\left|I_f(a,b)\right|$$

$$\le \left(L_p(a,b)\right)^{\frac{1}{s}}(b-a)(K_a\,K_b)^{\frac{1}{s}}\left(\int_a^b \frac{1}{(b-x)K_b^q+(x-a)\,K_a^q}dx\right)^{\frac{1}{sq}}$$

$$= \left(L_p(a,b)\right)^{\frac{1}{s}}(b-a)(K_a\,K_b)^{\frac{1}{s}}\left(\frac{1}{K_b^q-K_a^q}\right)^{\frac{1}{sq}}\left(\int_{(b-a)\,K_a}^{(b-a)K_b}\frac{1}{u}du\right)^{\frac{1}{sq}}$$

$$= \left(L_p(a,b)\right)^{\frac{1}{s}}(b-a)(K_a\,K_b)^{\frac{1}{s}}\left(\frac{1}{K_b^q-K_a^q}\right)^{\frac{1}{sq}}\left(\left(lnK_b^q-lnK_a^q\right)\right)^{\frac{1}{sq}}$$

$$=\frac{\left(L_p(a,b)\right)^{\frac{1}{s}}(b-a)(K_a\,K_b)^{\frac{1}{s}}}{\left(L(K_a\,,K_b)\,.\left(\,L_{q-1}(K_a\,,K_b)\right)^{q-1}\right)^{\frac{1}{sq}}}$$

$$\left|I_f(a,b)\right| \le \left(\frac{L_p(a,b)(b-a)^s K_a\,K_b}{\left(L(K_a\,,K_b)\,.\left(\,L_{q-1}(K_a\,,K_b)\right)^{q-1}\right)^{\frac{1}{q}}}\right)^{\frac{1}{s}}. \qquad (۱٦)$$

پایله: که په (۱۳) او (۱٦) غیر مساواتو کې $s=1$ شي، نو د (٦) قضیې غیرمساوات په لاس راځي.

۹. قضیه: که $K_x=|f'(x)|$ وي او فرض کړو، چې $f: I\subset(0,+\infty)\longrightarrow(0,+\infty)$ په I^0 باندې یو د مشتق وړ مپینګ او $a,b\in I^0\,,b>a$ وي. په دې صورت کې که $|f'|^q$ په $[a,b]$ انټروال

باندې يوه حسابي ـ هارمونيکي محدبه تابع او $p, q \in (1, \infty)$ ، $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ وي، نو د $K_a = K_b$ لپاره لاندې نامساوات

$$\left|I_f(a,b)\right| \le K_b\left\{\left[\left(bL_p^p - L_{p+1}^{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}(b-L_1)^{\frac{1}{q}}\right]+\left[\left(L_{p+1}^{p+1}-aL_p^p\right)^{\frac{1}{p}}(L_1-a)^{\frac{1}{q}}\right]\right\}.$$

او د $K_a \neq K_b$ لپاره د غيرمساوات صدق کوي.

$$\left|I_f(a,b)\right| \le (K_aK_b)\left\{\begin{aligned}&\left[\left(\left(b\left(L_p(a,b)\right)^p-\left(L_{p+1}(a,b)\right)^{p+1}\right)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{(b+a)K_b^q-2aK_a^q}{L(K_a^q,K_b^q)(K_b^q-K_a^q)}\right)^{\frac{1}{q}}\right]\\&+\left[\left(\left(L_{p+1}(a,b)\right)^{p+1}-a\left(L_q(a,b)\right)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{(b-a)K_a^q}{L(K_a^q,K_b^q)(K_b^q-K_a^q)}\right)^{\frac{1}{q}}\right]\end{aligned}\right\},$$

ثبوت: فرض کړو، چې د $q \ge 1$ لپاره د $|f'|^q$ تابع په $[a,b]$ انټروال باندې يوه حسابي ـ هارمونيکي محدبه تابع ده، نو

$$f(tx+(1-t)y) \le \frac{f(x)f(y)}{tf(y)+(1-t)f(x)},$$

نامساوي صدق کوي . په دې صورت کې که په پورتني غيرمساوات کې $t=\frac{b-x}{b-a}$ ، $1-t=\frac{x-a}{b-a}$ او $x=a\,, y=b$ سره تعويض کړو، نو د هر $x\in[a,b]$ لپاره ليکلای شو چې:

$$f'(tx+(1-t)y) \le \frac{f'(x)f'(y)}{tf'(y)+(1-t)f'(x)}$$

$$f'\left(\frac{b-x}{b-a}(a)+\left(\frac{x-a}{b-a}\right)(b)\right) \le \frac{f'(a)f'(b)}{\frac{b-x}{b-a}f'(b)+\left(\frac{x-a}{b-a}\right)f'(a)}$$

$$f'(x) \le \frac{(b-a)f'(a)f'(b)}{f'(b)(b-x)+f'(a)(x-a)}\,. \qquad (۱۷)$$

که د (۱۷) غيرمساوات د دواړه خواوو مطلقه قيمت ونيسو، نو

$$|f'(x)|^q \le \frac{(b-a)K_a^q\,K_b^q}{(b-x)K_b^q+(x-a)\,K_a^q}. \qquad (۱۸)$$

څرنگه چې $I_f(a,b)=\int_a^b x\,f'(x)dx$ دی، نو د

$$|I_f(a,b)| \le \int_a^b x\,|f'(x)|dx. \qquad (۱۹)$$

غیرمساوات صدق کوي. همدارنگه د هولډر- ایشچن غیرمساوات څخه په ګټه اخیستني (۱۹) غیرمساوات په لاندې ډول لیکلای شو:

$$\left|I_f(a,b)\right| \leq \frac{1}{(b-a)} \left\{ \left(\int_a^b (b-x) x^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b (b-x) |f'(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_a^b (x-a) \, x^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b (x-a) \, |f'(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \right\}. \qquad (۲۰)$$

اوس د (۲۰) -ام غیرمساوات هر انتیګرال بېل بېل محاسبه کوو او بېرته یې په (۲۰)-ام غیرمساوات کې وضع کوو. ددې محاسبې لپاره دوه حالتونه په پام کې نیسو؛

لومړی حالت: که $K_a = K_b$ وي، نو د (۲۰) غیرمساوات لومړی انتیګرال په لاندې ډول لیکلای شو:

$$\left(\int_a^b (b-x) x^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_a^b b \, x^p dx - \int_a^b x^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= (b-a)^{\frac{1}{p}} \left[b \left(L_p(a,b) \right)^p - \left(L_{p+1}(a,b) \right)^{p+1} \right]^{\frac{1}{p}}. \qquad (۲۱)$$

دویم انتیګرال په لاندې ډول ترلاسه کوو:

$$\left(\int_a^b (b-x) |f'(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_a^b b \, |f'(x)|^q dx - \int_a^b x \, |f'(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (*)$$

اوس د مشتق وړ حسابي ـ هارمونیکي محدبې تابع د تعریف څخه په ګټه اخیستني سره د

$|f'(x)|^q \leq \frac{(b-a) K_a^q \, K_b^q}{(b-x) K_b^q + (x-a) \, K_a^q}$ قیمت په (*) رابطه کې وضع کوو، چې اړوند انتیګرالونه یې په لاندې ډول په لاس راځي:

$$\int_a^b b \, |f'(x)|^q dx \leq b(b-a) \, K_b^q \,, \qquad (۲۲)$$

$$\int_a^b x \, |f'(x)|^q dx \leq (b-a) K_b^q L_1(a,b) \,, \qquad (۲۳)$$

(۲۲) او (۲۳) قیمتونه په (*) مساوات کې وضع کوو، نو

$$\left(\int_a^b (b-x) |f'(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} = \left[(b-a) K_b^q (b - L_1(a,b) \right]^{\frac{1}{q}}. \qquad (۲۴)$$

د (۲۰) غیر مساوات درېیم انتیګرال په لاندې ډول محاسبه کوو:

$$\left(\int_a^b (x-a)\,x^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_a^b (x^{p+1} - a x^p) dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= (b-a)^{\frac{1}{p}} \left[\left(L_{p+1}(a,b)\right)^{p+1} - a\left(L_p(a,b)\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}, \qquad (۲۵)$$

د (۲۰) غير مساوات څلورم انتيګرال لپاره لاندې عمليه ترسره کوو:

$$\left(\int_a^b (x-a)\,|f'(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_a^b x\,|f'(x)|^q dx - a\int_a^b |f'(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}, \quad (**)$$

د(**) مساوات د ښې خوا انتيګرالونه تر محاسبې وروسته په لاندې ډول ليکلای شو:

$$\int_a^b x\,|f'(x)|^q dx \le (b-a) K_b^q L_1(a,b), \qquad (۲٦)$$

$$a\int_a^b |f'(x)|^q\,dx \le a(b-a)\,K_b^q, \qquad (۲۷)$$

په(**) مساوات کې د (۲٦) او (۲۷) رابطو پورتني قيمتونه وضع کوو او په لاس راځي، چې

$$\left(\int_a^b (x-a)\,|f'(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \le \left((b-a)K_b^q L_1(a,b) - a(b-a)\,K_b^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left[(b-a)K_b^q\left(L_1(a,b) - a\right)\right]^{\frac{1}{q}}. \qquad (۲۸)$$

د (۲۱)،(۲۴)،(۲۵) او (۲۸) رابطو قيمتونه په (۲۰)رابطه کې وضع کوو، نو په لاس راځي، چې

$$\left|I_f(a,b)\right|$$

$$\le \frac{1}{(b-a)}\left\{\begin{array}{l}\left[(b-a)^{\frac{1}{p}}(b-a)^{\frac{1}{q}}\left(\left(b\left(L_p(a,b)\right)^p\right) - \left(L_{p+1}(a,b)\right)^{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(K_b^q\left(b - L_1(a,b)\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\ + \left[(b-a)^{\frac{1}{p}}(b-a)^{\frac{1}{q}}\left(\left(L_{p+1}(a,b)\right)^{p+1} - a\left(L_p(a,b)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(K_b^q\left(L_1(a,b) - a\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right]\end{array}\right\}$$

$$= K_b\left\{\left[\left(bL_p^p - L_{p+1}^{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(b - L_1\right)^{\frac{1}{q}}\right] + \left[\left(L_{p+1}^{p+1} - aL_p^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(L_1 - a\right)^{\frac{1}{q}}\right]\right\}, \qquad (۲۹)$$

دويم حالت: که $K_a \neq K_b$ وي، نو د (۲۰) غيرمساوات لومړی انتيګرال په لاندې ډول ليکلای شو:

$$\left(\int_a^b (b-x)x^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} = (b-a)^{\frac{1}{p}}\left[b\left(L_p(a,b)\right)^p - \left(L_{p+1}(a,b)\right)^{p+1}\right]^{\frac{1}{p}}. \quad (۳۰)$$

د (۲۰) غير مساوات دويم انتيګرال لپاره لاندې عمليه ترسره کوو:

$$\left(\int_a^b (b-x)|f'(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_a^b b\,|f'(x)|^q dx - \int_a^b x\,|f'(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}, \quad (***)$$

د مشتق وړ حسابي ـ هارمونيکي محدبې تابع د تعريف څخه په ګټه اخيستني د

$|f'(x)|^q \le \frac{(b-a)K_a^q\,K_b^q}{(b-x)K_b^q+(x-a)\,K_a^q}$ قيمت په $(***)$ مساوات کې وضع کوو، چې انټيګرالونه يې په لاندې ډول په لاس راځي:

$$\int_a^b b\,|f'(x)|^q dx \le \frac{b(b-a)K_a^q\,K_b^q}{L\left(K_a^q\,,K_b^q\right)}\ , \qquad (۳۱)$$

$$\int_a^b x\,|f'(x)|^q dx \le \frac{(b-a)K_a^q\,K_b^q}{K_b^q-K_a^q}\left(\frac{\left(bK_b^q-aK_a^q\right)}{L\left(K_a^q,K_b^q\right)} - (b-a)\right), \qquad (۳۲)$$

(۳۱) او (۳۲) قيمتونه په $(***)$ مساوات کې وضع کوو، نو په لاس راځي، چې

$$\left((b-a)^{\frac{1}{q}}K_aK_b\right)\left(\frac{b}{L\left(K_a^q,K_b^q\right)} - \frac{1}{K_b^q-K_a^q}\left(\frac{\left(bK_b^q-aK_a^q\right)}{L\left(K_a^q,K_b^q\right)} - (b-a)\right)\right)^{\frac{1}{q}}. \quad (۳۳)$$

د (۲۰) غير مساوات درېيم انټيګرال په لاندې ډول محاسبه کوو:

$$\left(\int_a^b (x-a)\,x^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = (b-a)^{\frac{1}{p}}\left(\left(L_{p+1}(a,b)\right)^{p+1} - a\left(L_p(a,b)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}. \quad (۳۴)$$

د (۲۰) غير مساوات څلورم انټيګرال لپاره لاندې عمليه ترسره کوو:

$$\left(\int_a^b (x-a)\,|f'(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_a^b x\,|f'(x)|^q dx - a\int_a^b |f'(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}, \quad (****)$$

د$(****)$ مساوات د ښي خوا انټيګرالونه تر محاسبې وروسته په لاندې ډول ليکلای شو:

$$\int_a^b x\,|f'(x)|^q dx \le \frac{(b-a)K_a^q\,K_b^q}{K_b^q-K_a^q}\left(\frac{(bK_b^q-aK_a^q)}{L(K_a^q,K_b^q)}-(b-a)\right), \qquad (۳۵)$$

$$a\int_a^b |f'(x)|^q\,dx \le \int_a^b a\frac{(b-a)K_a^q\,K_b^q}{(b-x)K_b^q+(x-a)\,K_a^q}dx = \frac{a(b-a)K_a^q\,K_b^q}{L(K_a^q,K_b^q)}\,, \qquad (۳٦)$$

په (****) مساوات کې د (۳۵) او (۳٦) رابطو پورتني قیمتونه وضع کوو؛ نو

$$\left(\int_a^b (x-a)\,|f'(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$\left((b-a)^{\frac{1}{q}}K_aK_b\right)\left(\frac{1}{K_b^q-K_a^q}\left(\left(\frac{(bK_b^q-aK_a^q)}{L(K_a^q,K_b^q)}-(b-a)\right)-\frac{a}{L(K_a^q\,,K_b^q)}\right)\right)^{\frac{1}{q}}, \qquad (۳۷)$$

د (۳۰)، (۳۳)، (۳۴) او (۳۷) رابطو قیمتونه په (۲۰)رابطه کې وضع کوو، نو لرو چې

$$|I_f(a,b)| \le$$

$$(K_aK_b)\left\{\begin{array}{l}\left[\left(\left(b\left(L_p(a,b)\right)^p-\left(L_{p+1}(a,b)\right)^{p+1}\right)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{(b+a)K_b^q-2aK_a^q}{L(K_a^q,K_b^q)(K_b^q-K_a^q)}\right)^{\frac{1}{q}}\right]\\ +\left[\left(\left(L_{p+1}(a,b)\right)^{p+1}-a\left(L_q(a,b)\right)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{(b-a)K_a^q}{L(K_a^q,K_b^q)(K_b^q-K_a^q)}\right)^{\frac{1}{q}}\right]\end{array}\right\}. \qquad (۳۸)$$

کارونه

که چیرې $p\in(-1,0)$ وي، نو د $x>0$ لپاره د $f(x)=x^p$ تابع یوه حسابي ـ هارمونیکي محدبه تابع ده، (İşcan, 2019). دې ته په کتو کولای شو د لوګارتمیک اوسط لپاره لاندې نامساوي بیان کړو.

۱. بیانیه: فرض کړئ، چې $a<b$ ، $q>1\,,s\ge 1$ ، $a,b\in(0,\infty)$ او $m\in(-1,0)$ وي، نو لاندې غیرمساوات صدق کوي،

$$L_{\frac{m}{q}+1}^{\frac{m}{q}+1}(a,b) \le \left(\frac{L_p(a,b)G^{\frac{2m}{q}}(a,b)}{\left(L\left(a^{\frac{m}{q}},b^{\frac{m}{q}}\right).L_{q-1}^{q-1}\left(a^{\frac{m}{q}},b^{\frac{m}{q}}\right)\right)^{\frac{1}{q}}}\right)^{\frac{1}{s}}.$$

ثبوت: که $x \in (0,\infty)$, $f(x) = \frac{q}{m+q}x^{\frac{m}{q}+1}$ وي، نو د $|f'(x)|^q = x^m$ تابع په $(0,\infty)$ انټروال باندې یوه حسابي ـ هارمونیکي محدبه تابع ده او پورتني غیرمساوات د (٦) قضیې د پایلې پر بنسټ په اسانۍ سره ترلاسه کیږي.

پرتله او مناقشه

په دې څېړنه کې مو د هولډر نامساوي د یوې تعمیم شوې بڼې او د هولډر ـ ایشچن نامساوي پر بنسټ چې د هولډر نامساوي ښه شوی شکل دی، د مشتق وړ حسابي ـ هارمونیکي تابع ګانو د کلاس لپاره نوي انټیګرالي غیر مساوات په لاس راوړي دي. د دې مطالعې اصلي موخه د شته پایلو تعمیم او د یو لړ هغو محدودیتونو رفع کولو لپاره د یوې ټولشموله او دقیقې کړنلارې وړاندې کول وو، چې د موضوع اړوند په پخوانیو اثارو کې ترسترګو کېدل. په ځانګړې توګه مو ښوودلې دي، چې له حسابي ـ هارمونیکي جوړښت نه په ګټه اخیستنې نه یوازې د پخوانیو انټیګرالي نامساوي ګانو په حدودو کې ښه والی راځي، بلکه په عددي انټیګرالونو کې د خطاء د کمولو د تخمین لپاره هم زمینه برابروي.

د څېړنې کړنلاره د تابع ګانو د مشتق د ځانګړنو په دقیق تحلیل او د هغوی له هارمونیکي خصوصیاتو نه په ګټه اخیستنې باندې ولاړه ده؛ په همدې دلیل وړاندیز شوی چوکاټ د دې وړتیا لري، چې د تابع ګانو د یوې پراخه ټولګې لپاره په کار یوړل شي. سربېره پر دې، له پخوانیو پایلو سره د لاسته راغلو پایلو مقایسه ښیي، چې زموږ موندنې د انټیګرالونو د خطاء په تخمین کې د پام وړ ښه والي لري.

همدارنګه ښودل شوې، چې په تېرو څېړنو کې د انټیګرالي نامساوي ګانو په ځینو سرحدونو کې تر خاصو شرایطو لاندې داسې ښه والی راځي، چې کولای شي د نظري او عملي محاسباتو په دقت باندې مثبت اثر پرېږدي. دا کار کولای شي، د توابعو او په علمي موډول جوړونه کې د هغوی د کارونو د تحلیل په برخه کې دنورو انټیګرالي نامساوي ګانو لپاره لاره هواره کړي. په ټوله کې د دې څېړنې پایلې د هغو شته علمي څېړنو د بډاینې په لور یو اغېزمن ګام بلل کېدای شي، چې د حسابي ـ هارمونیکي تابع ګانو لپاره د انټیګرالي نامساوي ګانو په اړه بحث کوي.

پایلې

په دې څېړنه کې د هولډر نامساوي یوې تعمیم شوې بڼې او د هولډر ـ ایشچن نامساوي، چې د هولډر نامساوي ښه شوې بڼه ده، پر بنسټ د مشتق وړ حسابي ـ هارمونیکي توابعو د کلاس لپاره ځیني نوي انټیګرالي نامساوتونه ترلاسه شوي دي. لاسته راغلې پایلې ښیې، چې د انټیګرالي نامساوي ګانو دا تعمیم شوی چوکاټ د یادو نامساوي ګانو د شته سرحدونو د اصلاح او د دقت امکان برابروي او د توابع ګانو

د یاد ډول انټیګرالي ځانګړنې بیانوي. په کار وړل شوې کړنلاره ښیي، چې دې ورته د نورو کلاسیکو انټیګرالي نامساوي ګانو لپاره داسې سرحدونه ومومو، چې په نورو پراخو شرایطو کې د اعتبار وړ او د پخوانیو شته پایلو په نسبت یې د کارونې لمن پراخه وي. سربېره پر دې، ترسره شوي تحلیل وښودله، چې ترلاسه شوې انټیګرالي رابطې د حسابي ـ هارمونیکي توابعو اړوند دخطاء ارزیابي او د توابعو تقریب په مطالعه کې مهم رول لوبوي. د دې څېړنې موندنې نه یوازې دا چې د انټیګرالي نامساوي ګانو د نوې تیوري نظریې چوکاټ غني کوي، بلکه په ریاضی انالیز کې د دقیقو نامساوي ګانو د پراختیا لپاره نوې لار پرانېزي او کولای شي د انټیګرالي نامساوي ګانو او د هغوی د کارونې په برخه کې د نورو څېړنو لپاره یو مناسب بنسټ شي.

د دې څېړنې د پام وړ لاسته راوړنو سره سره بیا هم ځیني محدودیتونه پر ځای پاتې دي. لومړی دا چې لاسته راغلې پایلې په ځانګړي ډول د مشتق وړ حسابي ـ هارمونیکي توابعو په کلاس پورې تړاو لري او د تابع ګانو د نورو کلاسونو لکه p- محدب، s- محدب او نورو لپاره یې بشپړ تعمیم یا د هغو تابع ګانو لپاره چې لومړي مشتقونه یې حسابي ـ هارمونیکي ځانګړتیا ونه لري، لا نوري مطالعې ته ضرورت لري. همدارنګه د انټیګرالي نامساوي ګانو وړاندې شوی چوکاټ د هولډر نامساوي په تعمیم شوې بڼه او د هولډر ـ ایشچن د نامساوي پر بنسټ ترلاسه شوی، نو ځکه د یاد نامساوي ګانو د نښو شویو بڼو تعمیم یا د دې دواړو د ترکیب امکان چې تر اوسه خلاص پاتې دی، بیا ځلي یادې نامساوي ګانې تشکیل شي. د دې نتایجو کارونه د فزیکي پېښو د موډل جوړونې په برخه کې لا نوري تجربې او عددي مطالعي ته اړتیا لري. دې محدودیتونو ته په کتو وړاندیز کېږي، چې په راتلونکو څېړنو کې د توابعو د نورو پېچلو کلاسونو لپاره دا ډول انټیګرالي نامساوات مطالعه شي. همدارنګه کېدای شي د نامساوي ګانو اوسنی چوکاټ په محاسباتي برخو کې په کار یوړل شي او د سرحدونو دقت یې د عددي مېتودونو په مرسته وکتل شي. د دې پایلو د کارونو پراختیا د قسمي ډیفرانسیل معادلو، د ثبات په تحلیل او د تقریب تیوري په برخو کې ګټورې څېړنیزې لارې برابروي.

منته او قدرداني

موږ د کابل پوهنتون د ریاضیانو پوهنځي څخه د زړه له تله مننه کوو، چې د دې څېړنې په ترسره کولو کې یې راسره علمي او تخنیکي مرسته کړې ده. همدارنګه د مقالې د کتونکو څخه مننه کوو، چې د مقالې د محتوا د ښه والي لپاره یې ګټور وړاندیزونه کړي وو.

د لیکوالانو ونډه

عبدالوکیل بیدار د مقالې مفهوم وړاندې کړی، د څېړنیزو کارونو څخه یې نظارت او د مقالې کتنه یې ترسره کړې ده. فیض محمد همت د موندنو، میتودلوژۍ، تحلیل او پایلي برخه او همدارنگه د مقالې لیکل ترسره کړي او نورالله نوري د مناقشې برخه او د مقالې کتنه ترسره کړې ده.

د گټو ټکر

لیکوالان تصدیق کوي، چې د دې مقالې په تړاو هېڅ ډول د گټو ټکر شتون نه لري.

اخځلیکونه

Ali, R. S., Mukheimer, A., Abdeljawad, T., Mubeen, S., & Ali, S. (2021). Some new harmonically convex function type generalized fractional integral inequalities. *Fractal and Fractional*, *5*(2), 54. https://doi.org/10.3390/fractalfract5020054

Awan, M. U., Akhtar, N., Iftikhar, S., Noor, M. A., & Chu, Y. M. (2020). New Hermite–Hadamard type inequalities for n-polynomial harmonically convex functions. *Journal of Inequalities and Applications*, *2020*(1), 125. https://doi.org/10.1186/s13660-020-02393-x

Baidar, A. W., & Kunt, M. (2023). Some Hermite–Hadamard type inequalities for GA-s-convex functions in the fourth sense. *Mathematical Methods in the Applied Sciences, 46*(5), 5466–5482. https://doi.org/10.1002/mma.8846

Baidar, A. W., & Kunt, M. (2024). Some general quantum integral inequalities for convex functions. *Filomat, 38*(14), 5127–5140. https://doi.org/10.2298/FIL2414127B

Baidar, A. W., Şanlı, Z., & Kunt, M. (2023). Some integral inequalities via new generalized harmonically convexity. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, *46*(16), 17226–17241. https://doi.org/10.1002/mma.9496

Dragomir, S. S., & Agarwal, R. (1998). Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula. *Applied mathematics letters*, *11*(5), 91-95. https://doi.org/10.1016/S0893-9659(98)00086-X

Eftekhari, N. (2014). Some remarks on (s, m)-convexity in the second sense. *J. Math. inequal*, *8*(3), 489-495.dx.doi.org/10.7153/jmi-08-36

Gordji, M. E., Delavar, M. R., & De La Sen, M. (2016). On ϕ-convex functions. *J. Math. Inequal*, *10*(1), 173-183.dx.doi.org/10.7153/jmi-10-15

Hezenci, F., & Budak, H. (2023). Simpson-type inequalities for conformable fractional operators with respect to twice-differentiable functions. *Journal of Mathematical Extension*, *17*. https://doi.org/10.30495/JME.2023.2589

İşcan, İ. (2014). Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 43*(6), 935–942.

İşcan, İ. (2019). New refinements for integral and sum forms of Hölder inequality. *Journal of Inequalities and Applications, 2019*(1), 304. https://doi.org/10.1186/s13660-019-2258-5

Kadakal, H. (2022). Generalization of some integral inequalities for arithmetic harmonically convex functions. *Cumhuriyet Science Journal, 43*(3), 497–503. https://doi.org/10.17776/csj.1110051

Kadakal, M., Agarwal, P., & İşcan, İ. (2025). Some new inequalities for differentiable arithmetic-harmonically convex functions. *Kragujevac Journal of Mathematics*, *49*(5), 669–675. DOI 10.46793/KgJMat2505.669K

Kashuri, A., Agarwal, R. P., Mohammed, P. O., Nonlaopon, K., Abualnaja, K. M., & Hamed, Y. S. (2022). New generalized class of convex functions and some related integral inequalities. *Symmetry*, *14*(4), 722. https://doi.org/10.3390/sym14040722

Kırmacı, U. S. (2023). On generalizations of Hölder's and Minkowski's inequalities. *Mathematical Sciences and Applications E-Notes, 11*(4), 213–225. https://doi.org/10.36753/mathenot.1150375

Liao, J. G., & Berg, A. (2019). Sharpening Jensen's inequality. *The American Statistician*, 278-281. https://doi.org/10.1080/00031305.2017.1419145

Maden, S., Kadakal, H., Kadakal, M., & İşcan, İ. (2017). Some new integral inequalities for n-times differentiable convex and concave functions. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, *10*(12), 6141–6148. doi:10.22436/jnsa.010.12.01

Shi, H. N., & Zhang, J. (2013). Some new judgement theorems of Schur geometric and Schur harmonic convexities for a class of symmetric functions. *Journal of Inequalities and Applications*, *2013*(1), 527. https://doi.org/10.1186/1029-242X-2013-527

Wu, S. (2005). Generalization and sharpness of the power means inequality and their applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 312*(2), 637–652. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.03.050

Zhang, T. Y., & Qi, F. (2014). Integral inequalities of Hermite-Hadamard type for m-AH convex functions. *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, *3*(2), 60–64. DOI:10.12691/tjant-2-3-1