



کاربرد تبدیل کانفورم و مشتق آن در تعیین توزیع پوتانسيل الکتریکي

محمد ظریف نوری^۱، پوهاند محمد خان حیدری^۲، نورالله نوری^۳، پوهندوی دکتور عبدالوکيل بیدار^۴
^۱ دپارتمنت ریاضیات عالی، پوهنځی الکترومیکانیک، پوهنتون پولي تخنیک کابل، کابل، افغانستان
^{۲،۳،۴} دپارتمنت ریاضیات، پوهنځی ریاضیات، پوهنتون کابل، کابل، افغانستان
 ایمیل: zarif.noori.kpu@gmail.com

چکیده

در این مقاله، نقش تبدیلات کانفورم و مشتقات آن در تحلیل توزیع پوتانسيل الکتریکي با شرایط سرحدی در نواحی پیچیده روی صفحه مورد بررسی قرار گرفته است. اهمیت این تبدیلات در حفظ خواص اساسی ناحیه و توانایی تبدیل هندسه‌های پیچیده به شکل‌های ساده‌تر است که روند حل ریاضی و دست‌یابی به پاسخ‌های دقیق را آسان می‌کند. در این تحقیق، با استفاده از روش‌های تحلیل ریاضی و تبدیلات کانفورم، نواحی پیچیده فیزیکی به نواحی ساده؛ مانند دیسک واحد یا نیم‌صفحه تبدیل شده و توزیع پوتانسيل الکتریکي در این نواحی ساده حل شده‌اند. سپس نتایج به نواحی اصلی بازگردانده شده‌اند. یافته‌ها نشان می‌دهد که تبدیلات کانفورم ابزار مؤثری در تحلیل توزیع پوتانسيل الکتریکي در نواحی پیچیده به شمار می‌آید. در پایان، سه مثال کاربردی از این تبدیلات ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: تبدیلات کانفورم؛ توزیع پوتانسيل الکتریکي؛ شرایط سرحدی؛ ناحیه پیچیده

Application of Conformal Mapping and Its Derivative in Electric Potential Distribution

Mohammad Zarif Noori^{1*}, Mohammad Khan Haidary², Noorullah Noori³, Abdul Wakil Baidar⁴

¹ Department of Higher Mathematics, Kabul Polytechnic University, Kabul, Afghanistan

^{2, 3, 4} Department of Mathematics, Kabul University, Kabul, Afghanistan

Email: zarif.noori.kpu@gmail.com

Abstract

This paper examines the role of conformal transformations and their derivatives in the analysis of electric potential distribution with boundary conditions in complex regions on the plane. The importance of these transformations lies in preserving the fundamental properties of the domain and enabling the conversion of complex geometries into simpler forms, which facilitates the mathematical solution process and the attainment of precise answers. In this study, using mathematical analysis methods and conformal transformations, complex physical regions are mapped to simpler domains, such as the unit disk or the upper half-plane, and the electric potential distributions are solved in these simpler domains. The results are then mapped back to the original domains. The findings demonstrate that conformal transformations are an effective tool in analyzing electrostatic problems in complex regions. Finally, three practical examples of these transformations are presented.

Keywords Conformal Mapping; Electric Potential Distribution; Boundary Conditions; Complex

ارجاع: نوری، م. ظ.؛ حیدری، م.؛ نوری، ن. و بیدار، ع. (۱۴۰۴). کاربرد تبدیل کانفورم و مشتق آن در تعیین توزیع

پوتانسيل الکتریکي. مجله علمي - تحقيقي علوم طبيعي پوهنتون کابل، ۸(۴)، ۱۴۹-۱۷۵.

<https://doi.org/10.62810/jns.v8i4.455>

مقدمه

یک تبدیل در فضای \mathbb{R}^n تبدیل کانفورم گفته می‌شود اگر زوایا و جهت بین منحنی‌های قاطع حفظ شوند (Lohwater, 1955, Brennan, 1978). پارامترسازی سطح یک مسأله اساسی در نظریه توابع هندسی^۱ است و هندسه تبدیلات کانفورم می‌تواند پارامترسازی از سطوح را با توپولوژی پیچیده تولید کند (Luo et al., 2010). نظریه نقش کانفورم که توسط کاردیتودری^۲ برای نواحی متحول معرفی شد، یک مفهوم بنیادی در آنالیز مختلط است که این تبدیل را قادر می‌سازد تا یک شکل مغلق را به یک شکل هندسی ساده‌تر طوری تبدیل کند که زوایا و ساختار شکل حفظ شود (Conway, 1978). برای نقش کردن نواحی پیچیده به نواحی استاندارد؛ مانند دیسک واحد و نیم‌صفحه بالایی، تبدیلات کانفورم با استفاده از روش‌های تحلیلی و شبیه‌سازی‌های عددی این را تسهیل می‌کنند (Gakhov, 1990). هرگاه $\Omega \subset \mathbb{C}$ یک ناحیه هم‌بند ساده باشد، قضیه نقش ریمان بیان می‌کند که یک تبدیل کانفورم ϕ از دیسک واحد $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ به Ω وجود دارد. به نظر می‌رسد این مغلق خواهد بود که برای نواحی پیچیده Ω یک تبدیل کانفورم محاسبه کنیم. بنابراین، برای یافتن رابطه بین خواص مشتق ریمان هندسه Ω یا خصوصیات کلی تبدیلات کانفورم حایز اهمیت است (Nehari, 1952). اگر ناحیه توسط منحنی ژوردان^۳ محدود شده باشد، این نقش ممکن از نواحی سرحدی یک ناحیه به دیسک واحد به‌طور پیوسته وسعت داده شود (Duren, 1983). از این رو تبدیلات کانفورم در مدل‌سازی نواحی با هندسه‌های مغلق نقش بسیار مهمی ایفا می‌کنند. در تحلیل مدل‌ها بررسی سرحدات نواحی مورد مطالعه به کمک تبدیلات کانفورم امکان‌پذیر است. به‌خصوص در زمینه الکتروستاتیک، رفتار سازه‌های الکتریکی و پوتانسیل‌ها به عنوان حل معادله لاپلاس نواحی پیچیده مطرح می‌شوند (Spiegel, 2009).

یکی از نقاط مورد توجه در بحث الکتروستاتیک، مطالعه آن در سرحدات نواحی است. مشتق تبدیل کانفورم اطلاعات مهمی در مورد تغییرات محلی تبدیل و تأثیر خصوصیات سرحد بر سازه‌های الکتریکی فراهم می‌کند. در مسایل الکتروستاتیک، خصوصیات سرحد مستقیماً با شدت سازه‌های الکتریکی در نزدیک سرحد ارتباط دارد. بنابراین، سرحدات نقش مهمی در تعیین شرایط سرحدی، کنترل توزیع چارج و تحلیل پوتانسیل‌ها دارد. وقتی سرحد ناحیه دارای ناهمواری یا ساختارهای

¹ Geometric function theory

² Cartheodory

³ Jordan

پیچیده؛ مانند سرحدات لیشیتز یا سرحداتفرکتالی باشد، رفتار سرحدی مشتق تبدیل کانفورم پیچیده و تحلیل آن نیازمند روش‌های پیشرفته تئوری و عددی است (Krantz, 1992; Lind, 2006).

در طراحی قطعات الکتریکی، سنسورها و دستگاه‌های میکروالکترونیکی، هندسه سرحدات اغلب پیچیده و دارای گوشه‌ها یا تغییرات ناگهانی است. این خصوصیات باعث تمرکز شدید ساحه الکتریکی در برخی نقاط سرحدی می‌شوند که اگر درست تحلیل نشوند، می‌توانند سبب از بین رفتن، کاهش کارایی یا عملکرد غیر منتظره دستگاه شوند (Salucci et al., 2019). بررسی دقیق و ریاضیکی رفتار مشتق تبدیل کانفورم، به عنوان یک گام اساسی در ارتقا و کیفیت مدل‌سازی و تحلیل مسایل الکتروستاتیکی مطرح است.

مقاله‌ی اندر^۴ و همکاران (۲۰۲۱) به بررسی برآوردهای سرحدی برای کلاس خاصی از توابع هولومورف^۵ در دیسک واحد می‌پردازد. در این تحقیق، از لیمه‌های شوارتس^۶ شوارتس-پیک^۷، تابع گرین^۸ و ارتباط بین تابع گرین برای دیسک واحد و لیمه شوارتس برای تعیین مقادیر برآورد شده و مشتقات آن‌ها استفاده شده است.

روشی برای تبدیل کانفورم در سیستم‌های دارای چندترمینال ارایه شده است این روش تحلیل الکتروستاتیکی در سرکت‌های چند اتصاله را تسهیل کرده اند (Wang & Wang, 2015).

در محیط‌های با خواص الکتریکی نامتجانس (تغییر در ضریب گذردهی الکتریکی در ناحیه)، تبدیل کانفورم به نقش محیط نامتجانس به محیط متجانس کمک می‌کند، سپس معادله لاپلاس در ناحیه جدید و ساده‌تر با شرایط سرحدی دیریکله حل می‌شود (Costamagna & Barba, 2017).

با استفاده از تبدیلات دوخطی و جوکوفسکی^۹، مسایل ساحه‌های الکتروستاتیکی با شرایط سرحدی مغلق در ناحیه‌های دوبعدی ساده‌سازی شده و سپس پوتانسیل‌ها به صورت دقیق محاسبه شده اند که نشان می‌دهد تبدیلات کانفورم چی اندازه در تحلیل رفتار ساحه الکتریکی مؤثر اند (Swem et al., 2020). تبدیلات کانفورم برای تحلیل جریان‌ات الکتروکینتیک در هندسه‌های دو بعدی پیچیده استفاده شده است، برعلاوه نشان داده شده که ساحه الکتریکی در گوشه‌ها و نزدیکی سرحدات به شدت وابسته به مشتق تبدیل کانفورم است (Gu et al., 2022).

⁴ Andar

⁵ Holomorphic functions

⁶ The Schwarz lemma

⁷ Schwarz pick lemma

⁸ Green function

⁹ Joukowski

در طراحی متالزهای پیچیده، از تبدیلات کانفورم برای تبدیل ساختارهای چنداتصاله به ساختار قابل تحلیل استفاده شده و نقش مشتق تبدیل را در کنترل ناحیه ساحه نوری-الکتریکی بررسی کرده اند (Salucci et al., 2019).

پلیز و براون از تبدیل شوارتز-کریستوفل برای تحلیل انتقال جریان هادی در یک شکاف باریک استفاده کرده‌اند. در این کار، ناحیه شکاف دار به نیم‌صفحه بالا نقش شده و شرایط سرحدی نیومن برای پوتانسیل الکتریکی مورد استفاده قرار گرفته است که منجر به حل تحلیلی صریح برای توزیع ساحه گردیده است (Yariv & Sherwood, 2015).

در بحث عددی لای^{۱۰} و همکاران (۲۰۱۷) روش شبیه‌سازی چارج را برای تبدیلات کانفورم بهبود داده‌اند. نشان داده شده است که با تنظیم مناسب گام تفاضلی و استفاده از مشتق تبدیل می‌توان نواحی با سرحدات هندسی غیر هموار را به دقت مدل‌سازی کرد.

بروچی^{۱۱} و همکاران (۲۰۰۴) طراحی و تحلیل یک محرک^{۱۲} MEMS را بررسی می‌کند. نقش تبدیل شوارتز-کریستوفل برای محاسبه ظرفیت و قوه‌های الکتروستاتیک استفاده شده و نتایج با دیتاهای شبیه‌سازی و تجربی مقایسه شده‌اند.

یک مطالعه تجربی و نظری در حوزه سیستم‌های میکروفلوئیدیک، از تبدیل شوارتز-کریستوفل^{۱۳} برای تحلیل ساحه الکتریکی در اطراف الکترودهای دوبعدی استفاده کرده‌اند. این تبدیل به تحلیل دقیق ساحه در نواحی با هندسه پیچیده؛ مانند الکترودهای پله‌یی و نوارهای باریک کمک نموده و مبنای طراحی بهینه تنظیم‌های الکترودی را فراهم ساخته است (Sun, 2008).

این تحقیق حول تحلیل و توصیف مسایل الکتروستاتیک در نواحی پیچیده است. همچنین بررسی رابطه بین مشتق و خصوصیات فیزیکی ساحه الکتریکی در ناحیه، هدف کلیدی در این مطالعه است. این مسأله علاوه بر توسعه نظریه تبدیلات کانفورم، کاربردهای مهمی در حل مسایل سرحدی لاپلاس و مدل‌سازی، پوتانسیل‌های الکتریکی خواهد داشت.

هدف این مقاله برجسته ساختن نقش تبدیل کانفورم و مشتق آن در بررسی حل مسایل الکتروستاتیک است. برای رسیدن به این هدف از نظریه توابع هارمونیک، آنالیز تابعی و هندسه تحلیلی، شرایط لازم و کافی برای کنترل رفتار مشتق در سرحدات استفاده می‌شود و اثرات این رفتار بر حل مسایل سرحدی

¹⁰ Lai

¹¹ Bruschi

¹² (Micro Electric Mechanical Systems)

¹³ Schwarz-Christoffel

ساحه‌ها و پوتانسیل الکتریکی مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای اینکه نقش عملی مشتق تبدیل کانفورم به درستی توضیح شود، چند مثال تحلیلی از تبدیلات کانفورم با سرحدات خاص بررسی می‌شود تا نشان داده شود چگونه تبدیل کانفورم در حل مسایل الکتروستاتیک مؤثر واقع می‌شود.

تبدیلات کانفورم به عنوان ابزاری مؤثر در نقش کردن نواحی پیچیده هندسی به نواحی ساده‌تر، در تحلیل مسایل الکتروستاتیک کاربرد بسیار زیاد پیدا کرده‌اند. در سال‌های اخیر، مطالعات زیادی با تمرکز در نواحی دارای گوشه، ناهمواری، یا سرحدات لپشیتز منتشر شده است که نشان‌دهنده‌ی نقش کلیدی آن در تعیین شدت و جهت ساحه الکتریکی است.

روش تحقیق

این تحقیق از نوع مطالعه تحلیلی-تیوریک است که هدف آن بررسی نقش تبدیلات کانفورم و مشتق آن‌ها در توزیع پوتانسیل الکتریکی در نواحی دوبعدی پیچیده و تحلیل اثرات سرحدی مشتق بر شدت ساحه الکتریکی است. استراتژی تحقیق در این مقاله به گونه‌ی است که ابتدا مفاهیم اساسی از معادلات لاپلاس، شرایط دیریکله و فورمول‌های پواسون برای دیسک واحد و نیم صفحه مرور شده‌اند. سپس ابزارهای نظری؛ مانند تحلیل مختلط، تابع هارمونیک، مشتق کانفورم و ویژگی‌های آن بررسی گردیده است. برای حل مسایل مشخص، ابتدا نواحی فزیک با ساختار هندسی پیچیده با استفاده از تبدیلات کانفورم به نواحی ساده تبدیل شده و سپس توزیع پوتانسیل با استفاده از فورمول‌های پواسون محاسبه گردیده است. در ادامه مشتق تبدیل و رفتار آن در نواحی بررسی شده و اثرات آن بر شدت ساحه الکتریکی تحلیل شده و وکتور ساحه الکتریکی نیز محاسبه گردید. سه مثال توضیحی برای ناحیه لنز-شکل، ناحیه بیرونی یک پارابول و قطاع یک دایره ارائه گردید.

تعریف مفاهیم

مرور معادلات لاپلاس و شرایط سرحدی در الکتروستاتیک

الکتروستاتیک یک بخش از علم فزیک است که چارج‌های ساکن و ساحه الکتریکی آن را مورد مطالعه قرار می‌دهد. اگر یک چارج مثبت واحد (آن قدر کوچک که اثر محسوسی بر ساحه نداشته باشد) در نقطه دل خواه A که قبلاً هیچ چارجی در آن وجود ندارد گذاشته شود، قوه وارد بر این چارج شدت میدان الکتریکی در A نام دارد و E نشان داده می‌شود. این این قوه را می‌توان از یک پوتانسیل مانند ϕ که گاهی پوتانسیل الکتروستاتیک نامیده می‌شود به دست آورد (Griffiths, 2017).

$$E = -\nabla\phi, \quad (1)$$

طوریکه ∇ اپراتور لاپلاس است و برای مختصات کارتزینی دو بعدی به صورت زیر تعریف می شود

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}.$$

قانون گاوس بیان می دارد که:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad (۲)$$

طوریکه ρ کثافت چارج سطحی در نقطه مورد نظر، ε ضریب گذردهی محیط (برای خلا $\varepsilon \approx 8.85 \times 10^{-12}$ Farads per meter ($\frac{F}{m}$)) است. از معادله (۱) و (۲) داریم که

$$\nabla \cdot E = -\nabla^2 \phi. \quad (۳)$$

بنابراین، قانون گاوس به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (۴)$$

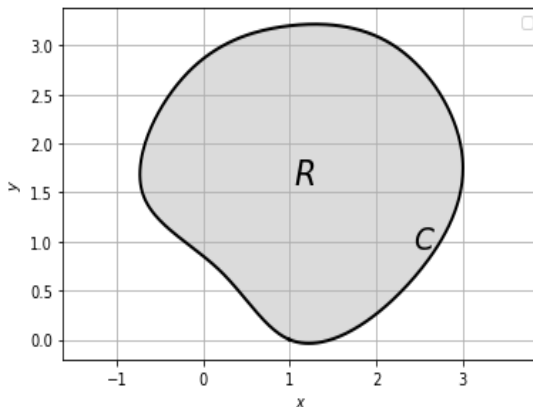
هرگاه در ناحیه مورد نظر چارج وجود نداشته باشد، یعنی $\rho = 0$ ، معادله (۴) به شکل زیر ساده می شود.

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad (۵)$$

معادله (۵) همان معادله لاپلاس است.

پس وقتی در یک ناحیه هیچ چارج الکتریکی وجود نداشته باشد، توزیع پتانسیل الکتریکی در آن ناحیه تابع ϕ است که معادله لاپلاس را صدق می کند.

فرض کنیم R (شکل ۱) یک ناحیه همبند ساده محدود به منحنی بسته ساده C باشد.



شکل ۱: ناحیه همبند ساده R را نشان می دهد که توسط منحنی C محدود شده است

ناحیه R می‌تواند نامحدود باشد. مثلاً، R را می‌توان نیم صفحه بالای محور x به عنوان سرحد C در نظر گرفت. یکی از مسایل مقدار سرحدی که اهمیت زیاد دارد، مسئله دیریکله است. در مسایل دیریکله، هدف این است که تابعی را دریافت کنیم که در داخل یک ناحیه مشخص، خاصیت هارمونیک بودن را داشته باشد و روی سرحد آن ناحیه مقدارهای مشخص (شرط سرحدی) داشته باشد. تابع هارمونیک در Ω تابعی است که معادله لاپلاس را در داخل ناحیه Ω صدق کند. هرگاه $\Omega \subset \mathbb{C}$ با سرحد $\partial\Omega$ و تابع f در $\partial\Omega$ متمادی باشد، مسئله دیریکله دریافت تابع هارمونیک ϕ است طوریکه

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0, & \text{در } \Omega \\ \phi = f, & \text{در سرحد } \partial\Omega \end{cases} \quad (۶)$$

باشد.

هرگاه ϕ توزیع پوتانسیل در ناحیه R باشد، وکتور ساحه الکتریکی در هر نقطه این ناحیه پوتانسیل طور ذیل استخراج می‌شود (Griffiths, 2017).

$$\varepsilon = -grad\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{i\partial\phi}{\partial y}. \quad (۷)$$

مسئله دیریکله برای دایره واحد، فورمول پواسون

فرض کنیم C_1 یک دایره واحد $|z| = 1$ و R ناحیه‌ای داخل این دایره باشد. یک تابع که در هر نقطه (r, θ) از R معادلات لاپلاس را صدق کند (یعنی هارمونیک باشد) و مقدار $F(\theta)$ را روی C_1 بگیرد (یعنی $\phi(r, \theta) = F(\theta)$) عبارت است از (Needham, 1997).

$$\phi(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)F(\varphi)d\varphi}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}, \quad (۸)$$

رابطه (۸) فورمول پواسون برای یک دایره واحد نامیده می‌شود.

مسئله دیریکله برای یک نیم صفحه

یک تابع که در نیم صفحه $y > 0$ ($Im\{z\} > 0$) هارمونیک بوده و مقدار $G(x)$ را روی محور x بگیرد (یعنی $\phi(x, 0) = G(x)$), $-\infty < x < \infty$ توسط رابطه

$$\phi(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y G(\eta) d\eta}{y^2 + (x-\eta)^2}, \quad (۹)$$

داده می‌شود. فورمول (۹) بنام فورمول پواسون برای یک نیم صفحه نامیده می‌شود. در بسیاری از مسایل عملی، شکل ناحیه بسیار پیچیده است که مستقیماً حل معادله را دشوار می‌سازد. در این موارد، استفاده از تکنیک‌های مثل تبدیل کانفورم و انالیز رفتار سرحدی مشتق، امکان ساده‌سازی مسئله و یافتن حل تحلیلی یا نیمه تحلیلی را فراهم می‌کند (Spiegel, 2009).

معرفی تبدیل کانفورم

تبدیل کانفورم یک تبدیل تحلیلی بین دو ناحیه صفحه مختلط است، که زاویه‌ها و شکل‌های کوچک را حفظ می‌کند. یعنی

- به صورت تحلیلی و مشتق‌پذیر مختلط است.

- در نقاط که مشتق آن صفر نباشد، زاویه را حفظ می‌کند.

به عنوان مثال، اگر دو خط که در نقطه‌ای زاویه‌ای θ در صفحه Z تشکیل داده اند، پس از تبدیل کانفورم، این دو خط در تصویر به همدیگر زاویه θ را خواهد داشت (Churchill & Brown, 2009).

مشتق تبدیل کانفورم

فرض کنید ϕ یک تبدیل کانفورم بین دو ناحیه در صفحه مختلط باشد. چون ϕ تحلیلی است، دارای مشتق مختلط $\phi'(z)$ در تمام نقاط داخلی ناحیه است. مقدار $|\phi'(z)|$ در واقع نرخ تغییر اندازه موضعی در نقطه z است. اگر سرحد ناحیه $\partial\Omega$ هموار و منظم باشد، یعنی تابع $\phi(z)$ و مشتق آن $\phi'(z)$ در نزدیکی سرحد معمولاً پیوسته و محدود هستند. در این حالت پوتانسیل و ساحه الکتریکی حاصل نیز رفتار نورمال خواهد داشت. در صورتیکه سرحد ناحیه شامل گوشه‌های با زاویه داخلی غیر صفری ($\theta < \pi$) باشد، مشتق تبدیل معمولاً در نزدیکی آن نقطه نامتناهی می‌شود (Churchill & Brown, 2009).

قضایای مورد استفاده در این مقاله

قضیه ۱: فرض کنیم $w = f(z)$ در ناحیه R از صفحه Z تحلیلی باشد، در این صورت معکوس آن $z = g(w)$ در R وجود دارد به شرطی که در R ، $f'(z) \neq 0$ باشد (یعنی کانفورم بودن تبدیل در هر نقطه R تضمین می‌شود) (Spiegel, 2009).

قضیه ۲: فرض کنیم $\phi(x, y)$ در R هارمونیک بوده و R به وسیله تبدیل $w = f(z)$ به R' در صفحه w نقش می‌شود که در آن $f(z)$ تحلیلی است و $f'(z) \neq 0$ طوری که $x = x(u, v)$ و $y = y(u, v)$ پس

$$\phi(x, y) = \phi[x(u, v), y(u, v)] = \psi(u, v), \quad (10)$$

در R' هارمونیک است. یعنی یک تابع هارمونیک تحت تبدیل $w = f(z)$ که تحلیلی است به یک تابع هارمونیک تبدیل می‌شود (Needham, 1997).

قضیه ۳: هرگاه روی سرحد یا بخشی از سرحد C یک ناحیه در صفحه z باشد، (ثابت) $\phi = a$ ، آنگاه روی نقش آن C' در صفحه w داریم که $\psi = a$. به همین ترتیب، اگر مشتق قایم بر C صفر باشد (یعنی بر C داشته باشیم $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$) در این صورت مشتق قایم ψ بر C' نیز صفر است (Churchill & Brown, 2009).

یافته‌ها

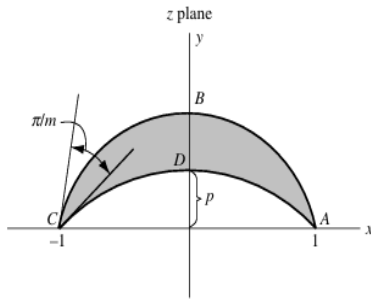
کاربرد تبدیل کانفورم و مشتق آن در حل مسایل الکتروستاتیک

برای اینکه نقش تبدیل کانفورم و مشتق آن در حل مسایل الکتروستاتیکی مشخص شود، مسایل الکتروستاتیک را در سه ناحیه مختلف در نظر می‌گیریم؛ در ابتدا تبدیلات کانفورم تعریف می‌کنیم که این نواحی را به نواحی ساده‌تر نقش کند، مسایل الکتروستاتیک را در این نواحی ساده با استفاده از فورمول‌های پواسون حل می‌کنیم و سپس حل آن را در نواحی اصلی انتقال می‌دهیم.

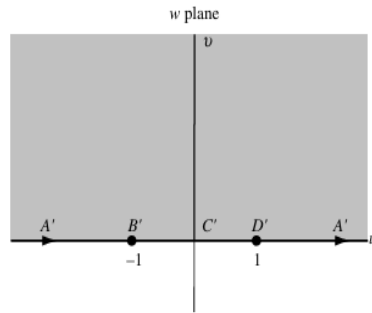
مسئله ۱. به عنوان مسئله اول الکتروستاتیکی، ناحیه لنز-شکل (شکل ۲) با زاویه $\frac{\pi}{m}$ ، $m \geq 2$ را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم توزیع پتانسیل الکتریکی را در این ناحیه با شرایط سرحدی زیر دریافت کنیم.

۱. روی قوس BC پتانسیل V_0 باشد.

۲. در قسمت‌های دیگر منحنی پتانسیل صفر باشد.



شکل ب



شکل الف

شکل ۲: نقش ناحیه لنز شکل به نیم صفحه بالای را نشان می دهد (Spiegel, 2009)

ناحیه لنز شکل با استفاده از تبدیل:

$$w = u + iv = e^{2mi \cot^{-1} p \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^m}, \quad (11)$$

روی نیم صفحه بالای w (شکل ۲) نقش می شود. قوس های ABC و CDA تحت این تبدیل، به ترتیب روی محور حقیقی منفی و مثبت $A'B'C'$ و $C'D'A'$ صفحه w نقش می شوند (Spiegel, 2009). در این صورت، شرایط سرحدی $\phi = V_0$ روی قوس BC به شرایط سرحدی $\phi = V_0$ روی انتروال $B'C'$ در صفحه w مطابقت می کند و در جاهای دیگر صفحه w پوتانسیل صفر است. اکنون مسئله را در نیم صفحه بالای با استفاده از فورمول (۹) حل می کنیم. در انتروال $[-1, 0]$ شرط سرحدی $G(\eta) = V_0$ و در جاهای دیگر صفر است. پس

$$\begin{aligned} \phi(u, v) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v G(\eta) d\eta}{v^2 + (u - \eta)^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-1} \frac{v V_0 d\eta}{v^2 + (u - \eta)^2} \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^0 \frac{v V_0 d\eta}{v^2 + (u - \eta)^2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{v V_0 d\eta}{v^2 + (u - \eta)^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^0 \frac{v V_0 d\eta}{v^2 + (u - \eta)^2} = \frac{V_0}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\eta - u}{v} \right) \Big|_{-1}^0 \\ &= \frac{V_0}{\pi} \left[\tan^{-1} \left(-\frac{u}{v} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{-1 - u}{v} \right) \right]. \quad (12) \end{aligned}$$

رابطه (۱۲) توزیع پوتانسیل را در نیم صفحه بالای نشان می دهد.

برای اینکه توزیع پوتانسیل را در ناحیه فیزیکی بدست آوریم، نیاز است که قیمت‌های $u = Re(w)$ و $v = Im(w)$ را از جنس x و y حاصل کنیم و در رابطه (۱۰) وضع کنیم. چون u قسمت حقیقی $(Re(w))$ تبدیل (۱۱) و v قسمت موهومی $(Im(w))$ تبدیل است. بناً تلاش می‌کنیم قسمت حقیقی و موهومی آن را دریافت کنیم. فرضاً

$$t := p \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^m, \quad (13)$$

باشد. از عینیت معکوس کوتانجانگت مختلط استفاده می‌کنیم.

$$\cot^{-1} t = \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{t+i}{t-i} \right), \quad (14)$$

با استفاده از رابطه $e^{2mi \cot^{-1} t} = \left(\frac{t+i}{t-i} \right)^m$ ، تبدیل (۱۱) طور ذیل به دست می‌آید

$$w = \left(\frac{p \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^m + i}{p \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^m - i} \right)^m,$$

چون $z = x + iy$ است؛ پس؛

$$\frac{z+1}{z-1} = \frac{x+1+iy}{x-1-iy} = \frac{x^2+y^2-1-2iy}{(x-1)^2+y^2} =: A + iB$$

طوری‌که،

$$A = \frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2}, \quad B = \frac{-2y}{(x-1)^2+y^2},$$

پس:

$$s := (A + iB)^m = R_0^m [\cos(m\theta_0) + i \sin(m\theta_0)],$$

طوری‌که،

$$R_0 = \sqrt{A^2 + B^2},$$

$$\theta_0 = \arg(A + iB) = \tan^{-1} \left(\frac{B}{A} \right),$$

از رابطه (۱۴) داریم که:

$$\begin{aligned} t &= p(A + iB)^m = pR_0^m [\cos(m\theta_0) + i \sin(m\theta_0)] \\ &= p R_0^m \cos(m\theta_0) + i p R_0^m \sin(m\theta_0), \end{aligned}$$

تعریف می‌کنیم که:

$$a = pR_0^m \cos(m\theta_0), \quad b = pR_0 \sin(m\theta_0),$$

$$w = \left(\frac{t+i}{t-i} \right) \text{ را محاسبه می‌کنیم}$$

$$t + i = a + i(b + 1), \quad t - i = a + i(b - 1),$$

مودل r و آرگومننت θ از $\frac{t+i}{t-i}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$r = \left| \frac{t+i}{t-i} \right| = \sqrt{\frac{a^2 + (b+1)^2}{a^2 + (b-1)^2}}$$

$$\theta = \arg\left(\frac{t+i}{t-i}\right) = \arctan\left(\frac{b+1}{a}\right) - \arctan\left(\frac{b-1}{a}\right),$$

قسمت حقیقی و موهومی w را می‌نویسیم،

$$w = r^m (\cos(m\theta) + i \sin(m\theta)),$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(w) = r^m \cos(m\theta) \\ \operatorname{Im}(w) = r^m \sin(m\theta) \end{cases}$$

طوری‌که تمام حدود تابع از جنس x و y است.

$$\left\{ \begin{array}{l} a = pR_0^m \cos(m\theta) \\ b = pR_0^m \sin(m\theta) \\ R_0 = \sqrt{\left(\frac{x^2 + y^2 - 1}{((x-1)^2 + y^2)}\right)^2 + \left(\frac{2y}{(x-1)^2 + y^2}\right)^2}, \\ \left(\frac{-2y}{(x-1)^2 + y^2}\right) = \arctan\left(\frac{2y}{(x-1)^2 + y^2}\right), \\ r = \sqrt{\frac{a^2 + (b+1)^2}{a^2 + (b-1)^2}}, \\ \theta = \arctan\left(\frac{b+1}{a}\right) - \arctan\left(\frac{b-1}{a}\right), \end{array} \right. \quad (15)$$

در نتیجه، قیمت u و v تبدیل (۱۱) است.

$$\begin{cases} u = r^m \cos(m\theta), \\ v = r^m \sin(m\theta). \end{cases} \quad (۱۶)$$

هرگاه قیمت پارامترهای r و θ را از رابطه (۱۵) در رابطه (۱۶) وضع کنیم، قیمت‌های u و v از جنس x و y حاصل می‌شود.

حل (۱۲) را در ناحیه فیزیکی برمی‌گردانیم.

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \frac{V_0}{\pi} \left[\tan^{-1} \left(-\frac{u}{v} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{-1-u}{v} \right) \right] \\ &= \frac{V_0}{\pi} \left[\tan^{-1} \left(-\frac{r^m \cos(m\theta)}{r^m \sin(m\theta)} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{-1-r^m \cos(m\theta)}{r^m \sin(m\theta)} \right) \right], \quad (۱۷) \end{aligned}$$

رابطه (۱۷) توزیع پتانسیل را در ناحیه لنز شکل (شکل ۲) محاسبه می‌کند.

اکنون نقش مشتق تبدیل کانفورم را در الکتروستاتیک بررسی می‌کنیم. وقتی حل معادله لاپلاس

$$\phi(z) = \phi(f(z)) = \phi(w)$$

از ناحیه اصلی به ناحیه ساده انتقال داده می‌شود، ساحه الکتریکی در ناحیه فیزیکی توسط رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$\vec{E}_z = -\nabla_z \phi(z) = -\nabla_z [\phi(f(z))] = -\left(\frac{d\phi}{dw} \right) \cdot f'(z). \quad (۱۸)$$

بنابراین ساحه الکتریکی در مستوی Z حاصل ضرب

- $\frac{d\phi}{dw}$: ساحه الکتریکی در ناحیه انتقال شده
- $f'(z)$: مشتق تبدیل کانفورم

است. رابطه (۱۸) نشان می‌دهد که شدت و جهت ساحه الکتریکی در ناحیه فیزیکی مستقیماً وابسته به مشتق تبدیل کانفورم $f'(z)$ است. مشتق مختلط $f'(z)$ می‌تواند به شکل زیر نوشته شود

$$f'(z) = \rho e^{i\theta},$$

طوری‌که،

- $\rho = |f'(z)|$: عامل مقیاس افزایش یا کاهش موضعی شدت ساحه الکتریکی

- $\arg(f'(z))$: تغییر جهت ساحه الکتریکی (تعیین می‌کند که ساحه در ناحیه اصلی به چه سمت و زاویه‌ی در ناحیه انتقال شده منحرف می‌شود).

است. اگر ساحه الکتریکی در صفحه W دارای شدت و جهت ثابت باشد، تصویر آن ساحه در صفحه Z ممکن است هم از نظر شدت و هم از نظر جهت متفاوت باشد، و این تغییرات تنها مربوط به مشتق تبدیل کانفورم است.

مشتق تبدیل (۱۱) عبارت است از

$$f'(z) = \frac{4mip \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{m-1}}{(z-1)^2 \left[1 + p^2 \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{2m}\right]} \cdot \exp \left[2mi \cot^{-1} \left(p \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^m \right) \right], \quad (19)$$

$|f'(z)|$ را محاسبه می‌کنیم که نشان دهنده عامل مقیاس افزایش یا کاهش شدت ساحه الکتریکی است.

$$|f'(z)| = \left| \frac{4mip \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{m-1}}{(z-1)^2 \left[1 + p^2 \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{2m}\right]} \right| = \frac{4|m||p| \left|\frac{z+1}{z-1}\right|^{m-1}}{|z-1|^2 \cdot \left|1 + p^2 \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{2m}\right|} \quad (20)$$

رابطه (۲۰) نشان می‌دهد که شدت ساحه الکتریکی تحت این تبدیل در نقطه Z چقدر افزایش یا کاهش می‌یابد.

وکتور ساحه الکتریکی این ناحیه را توسط رابطه (۷) محاسبه می‌کنیم. چون رابطه (۷) از جنس x و y است و توزیع پوتانسیل به شکل قطبی از جنس r و θ ، پس خوب است که در نخست شکل قطبی رابطه (۷) را دریافت کنیم.

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

از قاعده زنجیری داریم

یا

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \end{cases}, \quad (21)$$

رابطه (۲۱) را در رابطه (۷) وضع می‌کنیم.

$$-\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{i \partial \phi}{\partial y} = -\left(\cos \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right) - i\left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right),$$

بعد از ساده‌سازی و گروپ بندی داریم که

$$-\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{i \partial \phi}{\partial y} = -e^{i\theta} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} e^{-i\theta} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}.$$

بنابراین وکتور ساحه الکتريکی در شکل قطبی توسط رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{i \partial \phi}{\partial y} = -e^{i\theta} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} e^{-i\theta} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}. \quad (22)$$

حال اگر اوپراتور را بالای تابع داده شده تطبیق کنیم، وکتور ساحه الکتريکی در هر نقطه ناحیه لنز-شکل حاصل می‌شود. فرضاً

$$\mathcal{D} := -e^{i\theta} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} e^{-i\theta} \frac{\partial}{\partial \theta},$$

$$A := \tan^{-1}\left(\frac{-r^m \cos(m\theta)}{r^m \sin(m\theta)}\right) = \tan^{-1}(-\cot(m\theta)),$$

$$B := \tan^{-1}\left(\frac{-1 - r^m \cos(m\theta)}{r^m \sin(m\theta)}\right),$$

یا:

$$\phi(r, \theta) = \frac{V_0}{\pi} (A - B),$$

پس:

$$\mathcal{D}[\phi] = \frac{V_0}{\pi} (\mathcal{D}[A] - \mathcal{D}[B]), \quad (23)$$

برای محاسبه (23) $\mathcal{D}[A]$ و $\mathcal{D}[B]$ را جداگانه محاسبه می‌کنیم. از قاعده زنجیری داریم

$$\frac{\partial}{\partial r} = \tan^{-1}(f) = \frac{1}{1+f^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} = \tan^{-1}(f) = \frac{1}{1+f^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta}.$$

طوریکه

• برای A : $f_A = \frac{-r^m \cos(m\theta)}{r^m \sin(m\theta)} = -\cot(m\theta)$ ، چون A مستقل از r است، پس $\frac{\partial A}{\partial r} = 0$ است.

$$f_B = \frac{-1 - r^m \cos(m\theta)}{r^m \sin(m\theta)} : B \text{ برای } \bullet$$

پس:

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = m$$

در نتیجه،

$$D[A] = -e^{i\theta} \cdot 0 + \frac{1}{r} e^{-i\theta} \cdot m = \frac{m}{r} e^{-i\theta} \quad (24)$$

$$f_B = \frac{-1 - r^m \cos(m\theta)}{r^m \sin(m\theta)},$$

$$\frac{\partial f_B}{\partial r} = \frac{\eta_1 - \eta_2}{(r^m \sin(m\theta))^2},$$

طوری که،

$$\eta_1 = -mr^{m-1} \cos(m\theta) \cdot r^m \sin(m\theta),$$

$$\eta_2 = (-1 - r^m \cos(m\theta)) \cdot mr^{m-1} \sin(m\theta).$$

و

$$\frac{\partial f_B}{\partial \theta} = \frac{m r^m \sin(m\theta) \cdot r^m \sin(m\theta) - (-1 - r^m \cos(m\theta)) \cdot r^m m \cos(m\theta)}{(r^m \sin(m\theta))^2},$$

بعد از ساده سازی داریم که،

$$\frac{\partial f_B}{\partial \theta} = \frac{m(r^m + \cos(m\theta))}{r^m \sin^2(m\theta)}. \quad (25)$$

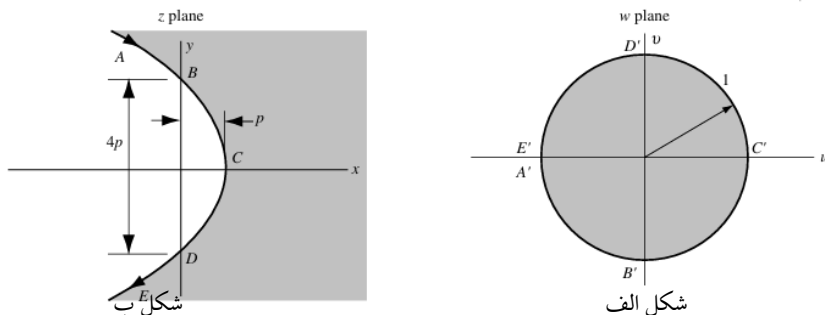
رابطه (۲۴) و (۲۵) را در (۲۳) وضع می‌کنیم. به این ترتیب وکتور وساحت الکتریکی در هر نقطه از ناحیه لنز-شکل حاصل می‌شود.

$$D[\phi] = \frac{V_0}{\pi} \left(\frac{m}{r} e^{-i\theta} - \frac{1}{1 + f_B^2} \left[e^{i\theta} \frac{\partial f_B}{\partial r} - \frac{1}{r} e^{-i\theta} \frac{\partial f_B}{\partial \theta} \right] \right), \quad (26)$$

رابطه (۲۶) نشان‌دهنده وکتور وساحت الکتریکی در ناحیه فیزیکی داده شده است.

مسئله ۲: ناحیه خارج از پارابول $y^2 = 4p(p - x)$ را در نظر می‌گیریم (شکل ۳ (ب))، هرگاه پوتانسیل روی شاخه بالای پارابول (قوس ABC) یک مقدار ثابت V_0 و روی شاخه پایینی پارابول

قوس CDE (صفر باشد. می‌خواهیم توزیع پوتانسیل را در هر نقطه‌ای خارج از پارابول (ناحیه رنگ شده) را محاسبه کنیم.



شکل ۳: ناحیه خارج از پارابول توسط تبدیل $w = 2\sqrt{\frac{p}{z}} - 1$ به دیسک واحد نقش می‌شود (Spiegel, 2009)

برای این‌که توزیع پوتانسیل را در هر نقطه‌ی خارج پارابول محاسبه کنیم از تبدیل کانفورم استفاده می‌کنیم. در نخست ناحیه فیزیکی داده شده را به یک دیسک واحد انتقال می‌دهیم. ناحیه فیزیکی داده شده توسط تبدیل

$$w = 2\sqrt{\frac{p}{z}} - 1, \quad (27)$$

به دیسک واحد نقش می‌شود (Needham, 1997). با در نظر داشت تبدیل (۲۷)، قوس‌های ABC و CDE پارابول به ترتیب روی قوس‌های $A'B'C'$ (از زاویه π تا 2π) و $C'D'E'$ (از زاویه 0 تا π) نقش می‌شوند. در مسئله شرط سرحدی چنین داده شده است:

$$\phi(x, y) = \begin{cases} V_0, & y^2 = 4p(p-x) \text{ و } y > 0 \\ 0, & y^2 = 4p(p-x) \text{ و } y < 0 \end{cases} \quad (28)$$

شرایط سرحدی (۲۸) ناحیه فیزیکی به صورت زیر به شرایط سرحدی در دیسک واحد معادل می‌شوند.

$$\phi(r, \theta) = \begin{cases} V_0, & \pi \leq \theta \leq 2\pi \\ 0, & 0 < \theta < \pi \end{cases}, \quad \lim_{r \rightarrow 1^-} \phi(r, \theta) = F(\theta), \quad (29)$$

چون تبدیل (۲۷) ناحیه فیزیکی را به دیسک واحد نقش می‌کند، برای دریافت توزیع پوتانسیل در دیسک واحد از فورمول پواسون برای دیسک واحد (۷) با در نظر داشت شرایط سرحدی (۲۹) استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
 \phi(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)F(\varphi)d\varphi}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{(1-r^2) \cdot 0 d\varphi}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2} \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_\pi^{2\pi} \frac{(1-r^2)V_0 d\varphi}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_\pi^{2\pi} \frac{(1-r^2)V_0 d\varphi}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}. \quad (30)
 \end{aligned}$$

برای محاسبه انتگرال (۳۰) از تعویض $\tan\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right) = t$ استفاده می‌کنیم. پس

$$\begin{aligned}
 \cos(\theta-\varphi) &= \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad d\varphi = -\frac{2 dt}{1+t^2}, \quad t_1 = \tan\left(\frac{\theta-\pi}{2}\right), \\
 t_2 &= \tan\left(\frac{\theta-2\pi}{2}\right), \quad (31)
 \end{aligned}$$

تعویضات را از رابطه (۳۱) در انتگرال (۳۰) وضع می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
 \phi(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_\pi^{2\pi} \frac{(1-r^2)V_0 d\varphi}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{t_1}^{t_2} \frac{-2(1-r^2)V_0 dt}{(1-r)^2 + (1+r)^2 t^2} \\
 &= \frac{(1-r^2)V_0}{\pi} \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{(r-1)^2 + (r+1)^2 t^2} \\
 &= -\frac{V_0}{\pi} \left[\arctan\left(\frac{(1+r)t}{1-r}\right) \right]_{t_1}^{t_2} \\
 &= -\frac{V_0}{\pi} \left[\arctan\left(\frac{(1+r)t_2}{1-r}\right) - \arctan\left(\frac{(1+r)t_1}{1-r}\right) \right]. \\
 &= \frac{V_0}{\pi} \left[\arctan\left(\frac{(1+r)\tan\left(\frac{\theta-\pi}{2}\right)}{1-r}\right) - \arctan\left(\frac{(1+r)\tan\left(\frac{\theta-2\pi}{2}\right)}{1-r}\right) \right], \quad (32)
 \end{aligned}$$

رابطه (۳۲) توزیع پوتانسیل را در دیسک واحد مستوی w نشان می‌دهد.

اکنون توزیع پوتانسیل را در ناحیه فزیکه دریافت می‌کنیم. در مستوی w داریم $w = u + iv$

پس:

$$\begin{cases} r = \sqrt{u^2 + v^2}, \\ \theta = \arctan\left(\frac{v}{u}\right). \end{cases} \quad (33)$$

با استفاده از تبدیل (۲۷) قیمت‌های u و v را از جنس x و y دریافت می‌کنیم.

$$w(z) = u + iv = 2\sqrt{\frac{p}{z}} - 1 = \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{\rho}} \left(\cos\left(\frac{\theta_z}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\theta_z}{2}\right) \right) - 1, \quad (34)$$

طوری‌که $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $\theta_z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ روی مستوی z است. بعد از مشخص کردن قسمت‌های حقیقی و موهومی (۳۴) قیمت‌های u و v از جنس x و y چنین حاصل می‌شود.

$$\begin{cases} u = \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos\left(\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) - 1, \\ v = \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin\left(\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right). \\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \quad (35)$$

هرگاه قیمت‌های u و v را از رابطه (۳۵) در رابطه (۳۳) وضع کنیم، قیمت‌های r و θ از جنس x و y حاصل می‌شود. برای اینکه توزیع پوتانسیل در ناحیه فیزیکی حاصل شود، قیمت‌های r و θ که از جنس x و y است در رابطه (۳۲) وضع می‌کنیم، به این ترتیب توزیع پوتانسیل (حل معادله لاپلاس) در ناحیه اصلی (خارج از پارابول) حاصل می‌شود.

مشتق تبدیل (۲۷) را محاسبه می‌کنیم که نشان دهنده عامل مقیاس شدت ساحه الکتريکی در ناحیه فیزیکی است.

$$w = 2\sqrt{\frac{p}{z}} - 1 \Rightarrow w'(z) = -\sqrt{\frac{p}{z^3}},$$

پس $|w'| = \left| \sqrt{\frac{p}{z^3}} \right|$ تعیین کننده عامل کشش شدت ساحه الکتريکی است.

برای اینکه وکتور ساحه الکتريکی را در هر نقطه از ناحیه فیزیکی دریافت کنیم، کافی است اوپراتور

$$\mathcal{D} := -e^{i\theta} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} e^{-i\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

پس

$$D[\phi(r, \theta)] = \frac{4V_0}{\pi} \cdot \frac{[\mu_1 - \mu_2]e^{i\theta}}{\mu_3}, \quad (36)$$

طوریکه،

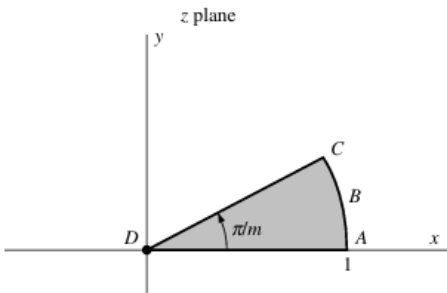
$$\mu_1 = 2(r^2 - 1) \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta},$$

$$\mu_2 = \left(r^2 \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{r^2}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} + \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right),$$

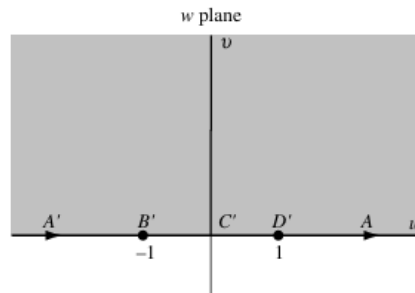
$$\mu_3 = \left[(r-1)^2 + (r+1)^2 \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \left[(r-1)^2 + (r+1)^2 \cot^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right],$$

هرگاه قیمت‌های r و θ را با استفاده از رابطه (۳۵) از جنس x و y دریافت کنیم و در رابطه (۳۶) وضع کنیم، وکتور ساحه الکتریکی در ناحیه خارج از پارابول حاصل می‌شود.

مسئله ۳: قطاع یک دایره واحد را در نظر می‌گیریم (شکل ۴). هرگاه پوتانسیل روی قوس ABC یک مقدار ثابت V_0 و در کناره‌های دیگر صفر باشد. می‌خواهیم توزیع پوتانسیل را در هر نقطه‌ای این قطاع دایره دریافت کنیم.



شکل ب



شکل الف

شکل ۴: نقش یک قطاع دایره را به نیم صفحه بالای نشان می‌دهد (Spiegel, 2009)

قطاع دایره داده شده توسط تبدیل

$$w = \left(\frac{1 + z^m}{1 - z^m} \right). \quad m \geq 2 \quad (37)$$

به نیم صفحه بالای نقش می‌شود. قوس ABC قطاع دایره روی محور حقیقی منفی $A'B'C'$ نقش می‌شود (Needham, 1997). شرایط سرحدی اینکه در مستوی Z روی قوس ABC پوتانسیل V_0 و در کناره‌های دیگر صفر باشد، روی مستوی w معادل است به اینکه روی محوری حقیقی منفی $A'B'C'$

$(u < 0)$ پوتانسیل V_0 و روی محور حقیقی مثبت $(u > 0)$ صفر است. چون تبدیل (۳۷) ناحیه فزیک را به نیم صفحه بالای نقش می‌کند، پس از فورمول پواسون برای نیم صفحه روی مستوی w استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \phi(u, v) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v G(\eta) d\eta}{v^2 + (u - \eta)^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{v G(\eta) d\eta}{v^2 + (u - \eta)^2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{v G(\eta) d\eta}{v^2 + (u - \eta)^2}. \end{aligned} \quad (38)$$

قسمت دوم رابطه (۳۸) صفر است، زیرا شرایط سرحدی در محور حقیقی مثبت صفر است. قسمت اول رابطه (۳۸) را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \phi(u, v) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v G(\eta) d\eta}{v^2 + (u - \eta)^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{v G(\eta) d\eta}{v^2 + (u - \eta)^2} = \frac{V_0}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\eta - u}{v} \right) \Big|_{-\infty}^0 \\ &= \frac{V_0}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\frac{u}{v} \right) \right] = \frac{V_0}{2} - \frac{V_0}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{u}{v} \right). \end{aligned} \quad (39)$$

(۳۹) توزیع پوتانسیل را در نیم صفحه بالای نشان می‌دهد. برای اینکه توزیع پوتانسیل را در ناحیه فزیک دریافت کنیم، در تبدیل (۳۷) قسمت‌های حقیقی و موهومی آن را از جنس x و y دریافت می‌کنیم.

تعریف می‌کنیم که:

$$z = Re^{i\theta}, \quad R = |z|^m = (x^2 + y^2)^{\frac{m}{2}}, \quad \theta = m \arg(z) = m \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right),$$

پس:

$$\frac{1 + z^m}{1 - z^m} = \frac{1 + Re^{i\theta}}{1 - Re^{i\theta}} = \frac{(1 + R \cos \theta) + i R \sin \theta}{(1 - R \cos \theta) - i R \sin \theta}, \quad (40)$$

صورت و مخرج (۴۰) را ضرب مزدوج مخرج می‌کنیم، بعد از ساده‌سازی داریم که

$$w = u + iv = \frac{(1 - R^2) + 2i R \sin \theta}{1 - 2R \cos \theta + R^2}, \quad (41)$$

از (۴۱) قسمت حقیقی و موهومی آن چنین نتیجه می‌شود

$$\begin{cases} u = \frac{1 - R^2}{1 - 2R \cos \theta + R^2}, \\ v = \frac{2R \sin \theta}{1 - 2R \cos \theta + R^2}. \end{cases} \quad (۴۲)$$

حالا اگر قیمت‌های u و v را از جنس r و θ از رابطه (۴۲) در (۳۹) وضع کنیم، توزیع پوتانسیل در ناحیه فیزیکی چنین حاصل می‌شود.

$$\phi(x, y) = \frac{V_0}{\pi} - \tan^{-1} \left(\frac{1 - R^2}{2R \sin \theta} \right). \quad (۴۳)$$

قیمت‌های R و θ را از جنس x و y در رابطه (۴۳) وضع کنیم، در نتیجه توزیع پوتانسیل روی ناحیه فیزیکی حاصل می‌شود.

$$\phi(x, y) = \frac{V_0}{\pi} - \tan^{-1} \left(\frac{1 - (x^2 + y^2)^{\frac{m}{2}}}{2(x^2 + y^2)^{\frac{m}{2}} \sin(\tan^{-1}(\frac{y}{x}))} \right), \quad (۴۴)$$

(۴۴) نشان‌دهنده توزیع پوتانسیل روی ناحیه فیزیکی است.

مشتق تبدیل (۳۷) را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} f(z) = \left(\frac{1 + z^m}{1 - z^m} \right) &\Rightarrow f'(z) = \frac{mz^{m-1}(1 - z^m) - (1 + z^m)(-mz^{m-1})}{(1 - z^m)^2} \\ &= \frac{2mz^{m-1}}{(1 - z^m)^2}, \end{aligned} \quad (۴۵)$$

پس $|f'(z)|$ عامل مقیاس شدت ساحه الکتریکی است.

اکنون می‌خواهیم وکتور ساحه الکتریکی را در هر نقطه از ناحیه فیزیکی محاسبه کنیم. پس عامل اوپراتور ∇ را روی تابع (۴۴) تطبیق می‌کنیم.

$$\varepsilon = -\nabla\phi = \left(-\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{V_0}{\pi} - \tan^{-1} \left(\frac{1 - (x^2 + y^2)^{\frac{m}{2}}}{2(x^2 + y^2)^{\frac{m}{2}} \sin(\tan^{-1}(\frac{y}{x}))} \right) \right),$$

پس:

$$\mathcal{D}[\phi(x, y)] = \frac{m(x + iy)}{2r^{m+2} \sin \theta} - \frac{(1 - r^m) \cos \theta}{2r^{m+2} \sin^2 \theta} (y - ix), \quad (۴۶)$$

طوری‌که $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ است. رابطه (۴۶) عبارت از وکتور ساحه الکتریکی در ناحیه فیزیکی است.

بحث و مناقشه

نتایج این مطالعه به روشنی نشان داد که تبدیل‌های کانفورم ابزار بسیار مؤثری برای ساده‌سازی مسائل الکتروستاتیکی در نواحی با سرحدات پیچیده هستند. با تبدیل نواحی فیزیکی دشوار به نواحی ساده‌تر، حل دقیق معادله لاپلاس امکان‌پذیر می‌شود و می‌توان از روش‌های تحلیلی کلاسیک مانند فرمول پواسون بهره گرفت. همچنین، مشتق این تبدیل‌ها نه تنها عامل هندسی، بلکه فیزیکی محسوب می‌شوند، زیرا به صورت مستقیم در شدت و توزیع ساحه الکتریکی تأثیر دارند. با استفاده از توزیع پوتانسیل در ناحیه فیزیکی همچنان می‌توان وکتور ساحه الکتریکی در نقطه ناحیه دریافت کرد.

تبدیل کانفورم، با داشتن خواص مانند حفظ زوایا و ساختار موضعی ناحیه، قادر است نواحی پیچیده را به نواحی هندسی ساده مانند دیسک واحد یا نیم صفحه فوقانی نقش کند. این ویژگی نه تنها حل معادله لاپلاس را آسان می‌کند، بلکه امکان استفاده از فرمول‌های کلاسیکی مانند فرمول پواسون را فراهم می‌آورد. مسئله اول این مقاله که تحلیل مسایل الکتروستاتیک در ناحیه لنز-شکل است، این ناحیه با استفاده از یک تبدیل کانفورم

$$w = u + iv = e^{2mi \cot^{-1} p \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^m},$$

به نیم صفحه بالای نقش می‌شود. مسایل الکتروستاتیک در نیم صفحه بالای حل شده و سپس به ناحیه اصلی انتقال داده شده است. مسئله دوم، حل مسایل الکتروستاتیک در ناحیه خارج از یک پارابول است که توسط تبدیل کانفورم $w = 2\sqrt{\frac{p}{z}} - 1$ به دیسک واحد نقش می‌شود. مسئله سوم، حل مسایل الکتروستاتیک از یک قطاع دایره است، که این قطاع دایره توسط تبدیل

$$w = \left(\frac{1+z^m}{1-z^m}\right). \quad m \geq 2$$

به نیم صفحه بالای نقش می‌شود.

توسط تبدیلات فوق مسایل الکتروستاتیک به صورت دقیق به روش تحلیلی حل شده است. هرچند به روش‌های عددی هم می‌توان توزیع پوتانسیل را در نواحی محاسبه کرد، اما دریافت وکتور ساحه الکتریکی در هر نقطه ساحه توسط این روش دشوار به نظر می‌رسد. تبدیل کانفورم این امکان را فراهم ساخت که مسایل الکتروستاتیک در ناحیه اصلی به شکل تحلیلی حل شود.

مقایسه نتایج این تحقیق با مطالعات پیشین نشان می‌دهد که استفاده از مشتق تبدیل برای تحلیل رفتار ساحه در نزدیکی گوشه‌ها و سرحدات غیر هموار کاملاً با یافته‌های تجربی و عددی تحقیقات معاصر مطابقت دارد (Gu et al., 2022). نشان داده که ساحه الکتریکی به شدت به رفتار مشتق تبدیل بستگی دارد و در نقاطی که این مشتق رشد می‌کند ساحه نیز افزایش می‌یابد. این نتیجه با تحلیل ارایه شده در این مقاله درباره رفتار $f'(z)$ در نواحی دارای زوایای تیز هماهنگ است.

همچنین، تحلیل ما درباره قابلیت تبدیلات کانفورم در ساده‌سازی هندسه‌های پیچیده با نتایج Sun (2008)، هم‌خوانی دارد؛ وی نشان داد که تبدیل شوارتز-کریستوفل می‌تواند نواحی با الکترودهای پله‌ای و پیچیده را به نیم‌صفحه تبدیل کند و حل تحلیلی ساحه را امکان‌پذیر سازد. در مقاله حاضر نیز نقش ناحیه لنز شکل و خارج پارابول به دیسک واحد نتایجی مشابه ارائه کرده و نشان داده است که تبدیل مناسب کانفورم موجب کاهش پیچیدگی محاسباتی و افزایش دقت می‌شود. تحقیقات کاربردی مانند مطالعه (Bruschi et al., 2004) در بخش MEMS نیز استفاده از تبدیل‌های کانفورم برای محاسبه ظرفیت و قوه الکتروستاتیکی را تأیید کرده‌اند.

در بخش اپتیک و طراحی متالزها نیز (Salucci et al., 2019) از تبدیل‌های کانفورم برای کنترل ساحه نوری-الکتریکی استفاده کرده‌اند. یافته‌های حاضر نشان می‌دهد مشتق تبدیل مسیر و شدت میدان را تعیین می‌کند، با این نتیجه سازگار است و نقش تبدیل کانفورم را فراتر از الکتروستاتیک، در طراحی دستگاه‌های پیچیده نوری تأیید می‌نماید.

یک مقایسه دیگر مربوط به مطالعه (Swem et al., 2020) است که در آن با استفاده از تبدیلات دوخطی و جوکوفسکی، مسائل سرحدی الکتروستاتیک ساده‌سازی شده‌اند. همانند یافته‌های این مقاله، آن‌ها نیز تأکید دارند که تبدیل مناسب می‌تواند حل معادلات را از یک فرم پیچیده به یک مسئله استاندارد در دیسک یا نیم‌صفحه کاهش دهد.

نوآوری مقاله حاضر در این است که به جای تکیه بر شبیه‌سازی‌های عددی، پروسه تبدیل، حل و بازگرداندن ساحه به ناحیه اصلی به صورت کاملاً تحلیلی و با ارایه مثال‌های صریح انجام شده است. همچنین این تحقیق نقش مشتق تبدیل را نه به صورت کیفی، بلکه با روابط دقیق ریاضی مورد بررسی قرار داده و نشان داده است که تغییر شدت میدان تنها به عامل محلی $|f'(z)|$ وابسته است، در حالی که تغییر جهت میدان توسط فاز مشتق کنترل می‌شود.

در مجموع، نتایج این مقاله تأیید می‌کند که تبدیل‌های کانفورم و مشتق آن‌ها، یک چارچوب نظری قدرتمند برای تحلیل مسائل الکتروستاتیک در هندسه‌های پیچیده فراهم می‌سازند.

نتیجه‌گیری

یکی از چالش‌های اساسی در حل مسائل الکتروستاتیک، هندسه‌های پیچیده است که در نواحی مورد بررسی واقع می‌شوند؛ این نواحی ممکن است شامل سرحدات دارای گوشه، ساختارهای منحنی غیرمعمول یا نواحی چنداتصاله باشند. در چنین مواردی، حل تحلیلی مستقیم معادله لاپلاس با شرایط سرحدی دیریکله یا نویمن بسیار دشوار و گاه غیرممکن است. استفاده از تبدیل کانفورم در برخی موارد بر حل چنین مسائلی کمک می‌کند.

نکته کلیدی دیگری در این پروسه، نقش مشتق تبدیل کانفورم است که میزان تغییر ساحه را در نقاط مختلف کنترل می‌کند. مشتق این تبدیل، با تعیین شدت و جهت ساحه الکتریکی در ناحیه اصلی، نشان می‌دهد که چگونه یک ساحه ساده در ناحیه استاندارد می‌تواند در ناحیه اصلی به صورت پیچیده و متمرکز ظاهر شود. این پدیده به‌ویژه در نزدیکی گوشه‌ها و مرزهای تیز بیشتر نمود دارد و اهمیت تحلیل مشتق را دوچندان می‌سازد.

این یافته‌ها کاربردهای متعددی در طراحی سیستم‌های الکترونیکی، میکروفولوییدیکی، حسگرها و تجهیزات MEMS دارند، جایی که هندسه سرحدات پیچیده است و تحلیل دقیق ساحه الکتریکی برای کارایی و ایمنی دستگاه‌ها حیاتی است. مطالعه حاضر همچنین مسیر را برای توسعه روش‌های عددی مبتنی بر تبدیل کانفورم در مدل‌سازی مسائل سرحدی هموار می‌سازد. هرچند در برخی موارد انجام محاسبات سنگین است اما حداقل می‌تواند به عنوان یک روش برای حل مسائلی الکتروستاتیک استفاده شود. در ناحیه‌های فزیک که تبدیل کانفورم به شکل تحلیلی موجود نیست، می‌توان با استفاده از روش‌های عددی تبدیل کانفورم بدست آورد و مسائلی الکتروستاتیک را در آن حل کرد.

سپاسگزاری

از پوهنتون کابل، پوهنشی ریاضیات و پوهنتون پولی‌تخنیک کابل سپاس گزار هستیم که با کمک تخنیکی و علمی زمینه انجام این تحقیق را فراهم ساخت.

سهام نویسندگان

نویسنده اول فعالیت‌های تحقیقی شامل طراحی، محاسبات، تحلیل و نگارش مقاله را برعهده داشته است. سه نویسنده دیگر در مراحل مختلف شامل توسعه ایده، مرور ادبیات، تحلیل نتایج و بازبینی علمی مشارکت فعال داشته‌اند.

تضاد منافع

تصدیق می‌گردد که هیچ‌گونه تضاد منافع بین نویسندگان وجود ندارد.

منابع

- Andar, Z. S., Sarhang, M., & Khan, M. (2021). Estimation of specific class, in the unit disc holomorphic functions. *International Journal of Advanced Electronic Engineering*. <https://doi.org/10.22271/27084558.2021.v2.i1a.7>
- Brennan, J. E. (1978). The integrability of the derivative in conformal mapping. *Journal of the London Mathematical Society*, 18(2), 261–272. <https://doi.org/10.1112/jlms/s2-18.2.261>
- Bruschi, P., Nannini, A., Pieri, F., Raffa, G., Vigna, B., & Zerbini, S. (2004). Electrostatic analysis of a comb-finger actuator with Schwarz–Christoffel conformal mapping. *Sensors and Actuators A: Physical*, 113(1), 106–117. <https://doi.org/10.1016/j.sna.2004.02.038>
- Burrow, M. D. (1946). The application of conformal mapping to the solution of electrostatic problems (Master's thesis, McGill University). Includes proofs of invariance under complex transformation and solved examples using Schwarz–Christoffel mapping. (escholarship.mcgill.ca)
- Churchill, R. V., & Brown, J. W. (2009). *Complex Variables and Applications* (8th ed.). McGraw-Hill.
- Conway, J. B. (1978). *Functions of one complex variable* (2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, Vol. 11). Springer Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-6313-5>
- Costamagna, E., & Barba, P. D. (2017). Inhomogeneous dielectrics: Conformal mapping and finite element models. *Open Physics*, 15(1), 839–844. <https://doi.org/10.1515/phys-2017-0099>
- Costamagna, E., Di Barba, P., & Savini, A. (2009). Conformal Mapping of Doubly Connected Domains: An Application to the Modelling Of an Electrostatic Micromotor. *IET Science, Measurement & Technology*, 3(5), 312–320. Presents Schwarz–Christoffel mapping applied to electrostatic micromotor geometries. (The IET Digital Library) <https://doi.org/10.1049/iet-smt.2009.0016>
- Duren, P. (1983). *Theory of conformal mapping* (pp. 34). Dover Publications.
- Gakhov, F. D. (1990). *Boundary value problems* (pp. 53–70). Dover Publications.
- Garnett, J. (1981). *Bounded analytic functions* (p.139). Academic Press.
- Griffiths, D. J. (2017). *Introduction to Electrodynamics* (4th ed.). Cambridge University Press.
- Gu, Z., Huo, P., Xu, B., Su, M., Bazant, M. Z., & Deng, D. (2022). Electrokinetics in two-dimensional complicated geometries: Conformal mapping and experimental comparison. *Physical Review Fluids*, 7(3), 033701. <https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.7.033701>
- Guillaume, N., Kahn, W. K., Allen, R. A., Cresswell, M. W., & Zaghoul, M. E. (2004). Application of Conformal Mapping Approximation Techniques: Parallel Conductors of Finite Dimensions. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 53(3), 824–830. Uses conformal mapping to compute capacitance in multi-conductor electrostatic configurations. <https://doi.org/10.1109/TIM.2004.827065>
- Krantz, S. G. (1992). *Geometric function theory: Explorations in complex analysis* (pp. 120–150). Birkhäuser.
- Kress, R. (2012). Inverse problems and conformal mapping. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 57(2–4), 301–316. <https://doi.org/10.1080/17476933.2011.605446>

- Lai, F., Wang, Y. W., Lu, Y., & Wang, J. (2017). Improving the accuracy of the charge simulation method for numerical conformal mapping. *Mathematical Problems in Engineering*, 2017, Article 3603965. <https://doi.org/10.1155/2017/3603965>
- Lind, J. (2006). Conformal welding and Koebe's theorem. *Annals of Mathematics*, 163(3), 1093–1116. <https://doi.org/10.4007/annals.2006.163.1093>
- Lohwater, A. J., Piranian, G., & Rudin, W. (1955). The Derivative of a Schlicht Function. *Mathematica Scandinavica*, 3(1), 103–106. [Link](#)
- Luo, W., Dai, J., Gu, X., & Yau, S. T. (2010). Numerical conformal mapping of multiply connected domains to regions with circular boundaries. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 233(11), 2940–2947. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2009.11.038>
- Nehari, Z. (1952). *Conformal mapping*. McGraw-Hill.
- Needham, T. (1997). *Visual Complex Analysis*. Oxford University Press.
- Pommerenke, C. (1975). *Univalent functions*. Vandenhoeck & Ruprecht. <https://doi.org/10.1007/BF02404416>
- Salucci, M., Boulos, F., Polo, A., & Oliveri, G. (2019). Conformal transformation electromagnetics based on Schwarz–Christoffel mapping for the synthesis of doubly connected metalenses. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 68(3), 1836–1850. <https://doi.org/10.1109/TAP.2019.2948771>
- Singh, M. (2020). *Application of conformal mapping: Electrostatic potential* [Report]. Galgotias University. Covers conformal mapping examples including coaxial cylinders, parallel plates, potential between non-coaxial and semi-circular plates. (ResearchGate)
- Spiegel, M. R. (2009). *Complex variables* (2nd ed., pp. 250, 254, 288). McGraw-Hill Education.
- Sun, T. G. (2008). Electric field analysis using Schwarz–Christoffel mapping. *Journal of Physics: Conference Series*, 142(1), 012029. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/142/1/012029>
- Swem, S. T., Ogwola, P., & Otene, E. (2020). Application of the Schwarz–Christoffel transformation to the solution of harmonic Dirichlet problems in electrostatics. *Nigerian Annals of Pure and Applied Sciences*, 3(2), 168–178. <https://doi.org/10.46912/napas.164>
- Wang, W., & Wang, W. M. (2015). Conformal mapping for multiple terminals [Preprint]. *arXiv*. [Link](#)
- Yariv, E., & Sherwood, J. D. (2015). Application of Schwarz–Christoffel mapping to the analysis of conduction through a slot. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 471(2181), 20150292. <https://doi.org/10.1098/rspa.2015.0292>