د کابل پوهنتون دطبیعي علومو علمي ــ څېړنیزه مجله
مجلــه علــمی- تحقیقی علــوم طبیعی پوهنتون کابل
Journal of Natural Sciences – Kabul University
e-ISSN:3078-6665 P-ISSN:3078-5561

د کسري ديفرانسيلي معادلو د حل لپاره د تغير تکرار منونکي او آډومين تجزيوي نيمه تحليلي ميتودونو پرتله

محمد اسلم صالحي[1]، عبدالوکيل بيدار[2]، نورالله نوري[3]

[1] رياضي څانګه، د ښوونې او روزنې پوهنځی، وردګ پوهنتون، وردګ، افغانستان
[2،3] د رياضياتو څانګه، د رياضياتو پوهنځی، کابل پوهنتون، افغانستان
اېمېل: aslamsalihe@gmail.com

لنډيز

په دې مقاله کې د خطي او غير خطي کسري ديفرانسيلي معادلو د حل لپاره دوه نيمه تحليلي ميتودونه، يعنې آډومين تجزيوي ميتود او د تغير تکرار منونکی ميتود پرتله شوي دي. د مقايسې بنسټ د خطا کموالی، د ميتودونو ثبات، او د معادلو ډولونو پر وړاندې د هغوی اغېزمنتيا ده. پدې مقاله کې د يادو ميتودونو قوي او ضعيفي نقطې وړاندې شوي دي. د ورکړل شويو مثالونو، جدولونو او ګرافونو په مرسته دواړه ميتودونه ارزول شوي او د دقيق حل سره پرتله شوي، چې دا کار د Mathematica په وسيله ترسره شوی دی. پايلې ښيي چې په خطي معادلو کې د آډومين پولينوم ته اړتيا نه لري او په اسانۍ سره نږدې حل ورکوي، خو په غير خطي معادلو کې د مناسب لاګرانژ ضريب په ټاکلو سره چټک او اغېزمن تقرب برابروي. په ټوله کې، د غير خطي کسري معادلو لپاره اغېزمن نيمه تحليلي ميتود بلل کېږي.

کليدي کلمې: آډومين تجزيوي ميتود؛ خطي کسري ديفرانسيلي معادلې؛ غيري خطي کسري ديفرانسيلي معادلې؛ نيمه تحليلي ميتودونه؛ تغير تکرار منونکی ميتود

A Comparative Study of Variational Iteration and Adomain Decomposition Semi Analytical Methods for Fractional Differential Equations

Mohammad Aslam Salehi[1], Abdul Wakil Baidar [2], Noorullah Noori[3]

[1]Department of Mathematics, Faculty of Education, Wardak University, Wardak, Af
[2,3]Department of Mathematics, Faculty of Mathematics, Kabul University, Kabul, Af
Email: aslamsalihe@gmail.com

Abstract

This paper compares two semi-analytical methods, the Adomian Decomposition Method (ADM) and the Variational Iteration Method (VIM), for solving linear and nonlinear fractional differential equations. The comparison is based on error reduction, stability, and the effectiveness of each method for different types of equations. Using several examples, along with tables and graphs, the approximate solutions obtained are evaluated and compared with the exact solutions, with all computations performed in Mathematica. The results show that ADM provides an easy, efficient approximation for linear equations without requiring Adomian polynomials. However, for nonlinear equations, VIM converges faster and more accurately by selecting an appropriate Lagrange multiplier. Overall, VIM is identified as the more effective semi-analytical method for solving nonlinear fractional differential equations.

Keywords: Adomian Decomposition Method; Linear Fractional Differential Equations; Nonlinear Fractional Differential Equations; Semi-analytical Methods; Variational Iteration Method

ارجاع: صالحی، م.؛ بيدار، ع.؛ و نوری، ن.ا. (۱۴۰۴). د کسري ديفرانسيلي معادلو د حل لپاره د تغير تکرار منونکي او آډومين تجزيوي نيمه تحليلي ميتودونو پرتله. *مجله علمی- تحقيقی علوم طبيعی پوهنتون کابل*، ۸(۳)، ۸۹–۱۱۵.
https://doi.org/10.62810/jns.v8i3.453

سریزه

الحمد لله رب العالمین و الصلوة و السلام علی سید المرسلین و علی آله و اصحابه اجمعین.

د کسري ديفرانسيلي معادلو حل په اوسني عصر کې يوه مهمه او اساسي برخه ده. د دې ډول معادلو حل په درې ډوله ميتودنو (تحليلي ميتودونو، نيمه تحليلي ميتودون او عددي ميتودونو) لاسته راوړلای شو (Chakraverty, 2010 ;Kisela, 2008).

د نيمه تحليلي ميتودونو په مرسته د کسري ديفرانسيلي معادلو تقريبي حل پيداکېږي؛ يعنی هغه کسري ديفرانسيلي معادلې وربانديې حل کېږي، چې دقيق حل پيداکول يې ستونزمن او يا ناممکن وي. په دې اساس په نيمه تحليلي ميتودونو کې د کسري ديفرانسيلي معادلو د حل لپاره اغېزمن او زيات د کارونې وړ ميتودونه تغير تکرار منونکي او آډومين تجزيوي ميتودونه دي، چې هر يو يې خاصې ځانګړنې لري او د کسري ديفرانسيلي معادلو د بېلا بېلو ډولونو په حل کې کارول کېږي.

آډومين تجزيوي ميتود د لمړي ځل لپاره په(۱۹۸۰)م کال کې د آډومين لخوا معرفي شو. د دې ميتود په مرسته خطي(معمولي، قسمي) او غيرې خطي(معمولي، قسمي) کسري ديفرانسيلي معادلې حليږي. د دې ميتود په مرسته د معادلې حل د تابعوي سلسلې په شکل وړاندې کيږي (Elzaki & Chamekh, 2018).

د دې ميتود تيوريکي فارمولېشن معمولاً ساده دی، خو د آډومين پولينوم په واسطه د سلسلې د حدونو پيداکول او د هغه تقارب څېړل د ځينو پېچلو عمليو په واسطه ترسره کيږي (Gorenflo & Mainardi, 2008). د يادې سلسلې حدونه د آډومين پولينوم په مرسته پيداکولای شو. نوموړې متقاربه سلسله د کسري ديفرانسيلي معادلې تقريبي حل ښيي. د آډومين ميتود تقارب د غيرې خطي اپراتور په نظر کې نيولو سره تر ډېره يقيني او دقيق دی (Chakraverty, 2010).

د دې ميتود يوه مهمه ځانګړنه چې نور نيمه تحليلي ميتودونه يې نه لري او ياد ميتود ته يې اهميت ورکړی دی؛ هغه دا ده چې نوموړی ميتود د معادلې حل د څو جمله يي معادلې په شکل وړاندې کوي(ZILL, 2009).

د کسري ديفرانسيلي معادلو د تقريبي حل لاسته راوړلو په موخه بل نيمه تحليلي ميتود تغير تکرار منونکی ميتود دی؛ چې په(۱۹۹۲)م کال يې نظريه د لومړي ځل لپاره د چينايي پوه هي له لوري وړاندې شوه. هغه په بريالیتوب سره د نوموړي ميتود په مرسته عادي او قسمي ديفرانسيلي معادلې حل کړې. وروسته د رياضي نورو څېړونکو ددې ميتود په کارونې سره خطي، غيرې خطي، متجانسې او غيرې

متجانسې دیفرانسیلي معادلې حل کړې دي. یاد میتود د هغه دیفرانسیلي معادلو لپاره د کارونې وړ دی، چې محدودې او یا غیرې محدودې د تعریف ساحې لري (Chakraverty, 2010).

تغیر تکرار منونکی میتود اصلاً د لاگرانژ د ضریبونو د میتود تعمیم یافته شکل دی. دا میتود د خطي او غیرې خطي کسري دیفرانسیلي معادلو په شمول د ډېرو نورو مسایلو په حل کې کارول کیږي. په دې میتود کې د لاگرانژ ضریب د تصحیح تابع د پیژندګلوۍ په موخه معرفي کېږي. د دې میتود اصلي ځانګړنې ساده والی، انعطاف پذیري او لوړ دقت سره د غیرې خطي کسري دیفرانسیلي معادلو حلول دي. له بل پلوه د دې میتود په مرسته دقیق حل ته د رسېدو لپاره د اضافي وخت د ضایع کېدو او اضافي عملیو ترسره کولو څخه مخنیوی کوي. دغه میتود د تابع ګانو یوه سلسله تولیدوي، چې دقیق حل ته متقاربه وي (ZILL, 2009).

په انجینرۍ او ځینو نورو برخو کې د کسري دیفرانسیلي معادلو داسې مسایل موجود دي، چې حلول یې ستونزمن دي؛ نوپه دې اساس د دې ډول ستونزو د حل لپاره تر ټولو مناسب میتود همدغه تغیر تکرار منونکی میتود دی. په عمومي ډول ددې میتود په مرسته د کسري دیفرانسیلي معادلو حل د یوې داسې سلسلې په شکل وړاندې کېږي، چې دقیق حل ته په سرعت سره تقرب کوي (He & Wu, 2007). ددې مقالې په پایله کې به لاندې پوښتنې ځواب شي.

۱. په کوم حالت کې د کسري دیفرانسلي معادلو د حل لپاره نیمه تحلیلي مېتودونه کارول کیږي؟
۲. د خطاء د کموالي معیار په پام کې نیولو سره د خطي کسري دیفرانسلي معادلو د حل لپاره له اډومین تجزیوي او تغیر تکرار منونکې نیمه تحلیلي میتودونو څخه مناسب او مؤثر میتود مشخص کړئ؟
۳. د خطاء د کموالي معیار په پام کې نیولو سره د غیري خطي کسري دیفرانسلي معادلو د حل لپاره له اډومین تجزیوي او تغیر تکرار منونکې نیمه تحلیلي میتودونو څخه مناسب میتود مشخص کړئ؟

د څېړنې مواد او کړنلارې

د کسري دیفرانسیلي معادلو د تقریبي حل لاسته راوړلو لپاره له نیمه تحلیلي میتودونو څخه استفاده کوو او د دې حل لاسته راوړلو لپاره د دیفرانسیلي معادلو د بېلابېلو ډولونو، کسري مشتقاتو او کسري انتیګرالونو څخه استفاده کېږي. همدارنګه د دې ډول حل دقیق ښوودلو لپاره جدولونه او ګرافونه کاروو. د دې جدولونو او ګرافونو لاسته راوړلو لپاره Myple او Mathematica اپلیکیشنونه کارول کېږي. ددې موضوع د لاښه وضاحت لپاره لاندې اساسې مفاهیم وړاندې کوو.

ديفرانسيلي معادله

له درې سوه څخه زيات کلونه کېږي، چې اناليز د رياضياتو يوه مهمه برخه ده او همدارنګه ديفرانسيلي معادلې د هغه يوه مهمه برخه جوړوي؛ چې د طبيعي علومو په برخه کې تر ډېره د کارونې وړ دي. ښکاره ده، چې هېڅ شی بدون له تغير او تبديل څخه نه دي او د ديفرانسيلي معادلو لومړنی هدف دا دی، چې د مادي جهان د تغيراتو لپاره يوه ښه وسيله وګرځي. ځکه مادي نړۍ يعني طبيعت هميشه د تغير په حال کې دی. ديفرانسيلي معادلې تر ډېره حده د فزيکي پېښو له موډل کولو څخه لاسته راځي. په دې برخه کې به د ديفرانسيلي معادلو په تعريف باندې پيل وکړو:

تعريف. هغه معادلې چې د تابع مشتقات يې د يو يا څو مستقلو متحولينو د مشتقاتو سره رابطه ولري، د ديفرانسيلي معادلې په نوم يادېږي (ZILL, 2009). عمومي شکل يې په لاندې ډول دی:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (۱)$$

د ديفرانسيلي معادلې مرتبه. په ديفرانسيلي معادله کې د مشتق لوړې درجې ته د ديفرانسيلي معادلې مرتبه وايي.

د ديفرانسيلي معادلې درجه. په ديفرانسيلي معادله کې د لوړې مرتبې لرونکي حد توان ته د ديفرانسيلي معادلې درجه وايي.

مثلاً: لاندې ديفرانسيلي معادله دويمه مرتبه او درېيمه درجه ده.

$$2(y')^4 - (y'')^3 + 5y^2 = 10.$$

د خطي والي له پلوه د ديفرانسيلي معادلو ډلبندي. خطي ديفرانسيلي معادلې او غيرې خطي ديفرانسيلي معادلې.

خطي ديفرانسيلي معادلې. n--ترتيب عادي ديفرانسيلي معادلې خطي بلل کېږي. کله چې د $y, y', \ldots, y^{(n)}$ مشتقاتو درجه يو وي او يا هغه ديفرانسيلي معادلې دي، چې لاندې شکل ولري (ZILL, 2009).

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y - g(x) = 0. \qquad (۲)$$

يا

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x) = g(x). \qquad (۳)$$

د (۳) معادلې دوه خاص حالتونه چې لومړی مرتبه $n = 1$ خطي او دویمه مرتبه $n = 2$ خطي دیفرانسیلي معادلې په لاندې ډول لیکلای شو:

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad , \quad a_2\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x). \qquad (۴)$$

د خطي تقاضـــلي معادلې د عمومي معادلې په پام کې نیولو سره یادې معادلې لاندې دوې ځانګړنې لري: د $y, y', \ldots, y^{(n)}$ درجې باید یو وي.

د $y, y', \ldots, y^{(n)}$ ټول ضریبونه یعنې $a_1, a_2, \ldots, a_n$ باید یوازې د مستقل متحول پورې تړلې وي.

غیرخطي دیفرانسیلي معادلې. هغه دیفرانسیلي معادلې چې خطي نه وي او یا هغه معادلې چې د مشتقاتو ترمنځ یې غیرې خطي رابطه موجوده وي او یا هم پخپل جوړښت کې مثلثاتي نسبتونه ولري غیر خطي دیفرانسیلي معادلې بلل کېږي(ZILL, 2009 . لکه:

$$(1 - y)y'^2 + 2y = e^x \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} + siny = 0.$$

کسري دیفرانسیلي معادلې. کسري دیفرانسیلي معادلې هغه معادلې دي، چې مرتبه یا د مشتق درجه یې کسري عدد وي(Gorenflo & Mainardi, 2008).

عمومي شکل یې په لاندې ډول دی:

$$D^{\alpha}y(t) = f\big(t, y(t)\big). \qquad (۵)$$

یا

$$a_n(x)D^{\alpha_n}y(t) + a_{n-1}(x)D^{\alpha_{n-1}}y(t) + \cdots + a_0(x)D^{\alpha_0}y(t) - g(x) = 0.$$

چې دلته D^{α} نسبت د $y(t)$ تابع او t متحول ته د کسري مرتبې مشتق او همدارنګه α یو کسري عدد دی، چې د مشتق مرتبه ښیي.کسري دیفرانسیلي معادلې هم په عموم کې په لاندې دوه ډوله دي:

خطي کسري دیفرانسیلي معادلې. خطي کسري دیفرانسیلي معادلې هغه معادلې دي، چې د $y(t)$ تابع او د هغوی د D^{α}کسري مشتقاتو تر منځ خطي رابطه موجوده وي؛ یعنې د تابع او د هغې تفاضلات یوازې د ثابتو عددونو سره ضرب شوي وي.

مثلاً:

$$D_t^{0,5}y(t) + 3D_t^{0,25}y(t) - 5y(t) = 0.$$

غیرې خطي کسري دیفرانسیلي معادلې. غیر خطي کسري دیفرانسیلي معادلې هغه معادلې دي، چې د $y(t)$ تابع او د هغې د D^{α} کسري مشتقاتو تر منځ غیرې خطي رابطه موجوده وي؛ یعنې د غیر خطي عملیو لکه ضرب، تقسیم، طاقت په شکل لیکل شوي وي (Gorenflo & Mainardi, 2008).

مثلاً:

$$D_t^{1,5}y(t) - 5y(t)^2 = \sin t.$$

کسري انتیګرال نیونه

د کسري مشتقاتو او انتیګرالونو اصلي مفهوم د صحیح مرتبې لرونکي مشتقاتو او انتیګرالونو څخه حاصلیږي. نو پر دې اساس په دغه برخه کې د ریمان لیوویل انتیګرال په اړه بحث کوو.

د ریمان لیوویل کسري انتیګرال نیونه. د $f(t)$ متمادي تابع او $\alpha > 0$ لپاره د ریمان لیوویل کسري انتیګرال په لاندې ډول تعریفولای شو (Gorenflo & Mainardi, 2008).

$$I^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau. \qquad (٦)$$

$\Gamma(\alpha)$ ګاما تابع ده.

ځانګړنې.

$$I^{\alpha}\,[af(t) + bg(t)] = aI^{\alpha}\,f(t) + bI^{\alpha}\,g(t).$$

$$I^{\alpha}I^{\beta}f(t) = I^{\alpha+\beta}f(t).$$

$$I^{\alpha}f(T) = \frac{1}{(\mathrm{n}-1)!}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau.\ , \quad \text{for } n\epsilon N$$

$$I^{\alpha}t^{k} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)}t^{k+\alpha}.$$

کسري مشتقات

په دې برخه کې د کسري مشتق نیونې دوه مهم میتودونه مطالعه کوو. په لومړي میتود کې مشتق او انتیګرال د متناهي او عمومي تفاضلاتو د حدودو په شکل فرض کېږي. دویم میتود هم د یوې تابع د

تکراري انتیگرال تعمیم یافته شکل وړاندې کوي، چې ریمان لیوویل او کاپوتو میتودونه ددې میتود برخې جوړوي.

تعریف. د تابع د لومړنیو شرایطو په پام کې نیولو سره د کسري مشتقاتو لپاره لاندې څو فورمولونه موجود دي.

د ریمان لیوویل کسري مشتق. که چېرې $f(t)$ متمادي همواره تابع وي او $(0 > \alpha)$ پس د α مرتبه د ریمان لیوویل کسري مشتق عبارت دي له :

$$D_{RL}^{\alpha} f(t) = \begin{cases} \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau)d\tau\right], & n-1 < \alpha < n \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t) & \alpha = n. \end{cases} \quad (۷)$$

کاپوتو کسري مشتق. کاپوتو کسري مشتق نیونه په انجینرۍ او فزیکي موډلونو کې په پراخه کچه کارول کیږي؛ په ځانگړې ډول کله چې د ساده مشتق په مرسته لومړني شرایط وړاندې شوي وي. عمومي فورمول یې په لاندې ډول دی:

$$D_{C}^{\alpha} f(t) = \begin{cases} \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \cdot \frac{d^n f(\tau)}{dt^n} d\tau\right], & n-1 < \alpha < n \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t) & \alpha = n. \end{cases} \quad (۸)$$

چې په هغه کې $n = [\alpha]$.

یادونه. د طاقت تابع گانو کاپوتو کسري مشتق د لاندې فورمول په مرسته محاسبه کولای شو:

$$f(t) = t^p => D_C^{\alpha} t^p = \begin{cases} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha}, & n-1 < \alpha < n,\ p > n-1\ p \in \mathbb{R} \\ 0 & n-1 < \alpha < n,\ p \le n-1. p \in \mathbb{R} \end{cases}$$

موندنې

تغییر تکرار منوندنې میتود

تغیر تکرار منونکی میتود د بېلابېلو ډولونو خطي او غیرې خطي کسري دیفرانسیلي معادلو په حل کې کارول کیږي. د دې میتود مهمه ځانگړنه د هغه انعطاف پذیري او د غیرې خطي دیفرانسیلي معادلو نسبتاً دقیق حل لاسته راوړل دي. په انجینرۍ او ځینو نورو برخو کې د کسري دیفرانسیلي معادلو داسې مسایل موجود دي، چې حلول یې ستونزمن دي. نو پر دې اساس د دې ډول ستونزو د حل لپاره تر ټولو مناسب میتود همدغه تغیر تکرار منونکی میتود دی. په عمومي ډول د دې میتود په مرسته د کسري

ډیفرانسیلي معادلې حل د یوې داسي سلسلي په شکل وړاندی کیږي، چې دقیق حل ته په سرعت سره تقرب کوي. په دې میتود کې د تقرب لپاره د لاګرانژ ضریب څخه استفاده کیږي او د دې ضریب ټاکل د کسري ډیفرانسیلي معادلې د حل په دقت مستقیم اغیز لري (He & Wu, 2007).

تغیر تکرار منونکی نیمه تحلیلي میتود د غیرې خطي کسري ډیفرانسیلي معادلو لپاره یو مهم او اغیزمن میتود دي. اغیزمنتیا یې داده، چې غیرې خطي کسري ډیفرانسیلي معادله بدون له دې چې خطي شي تقریبي حل یې د تکراري رابطې په مرسته پیدا کوي(Belghaba, 2022).

د تغییر تکرار منونکي میتود په مرسته د ډیفرانسیلي معادلې حل لپاره لاندې دوې نقطې مهمې دي.

د لاګرانژ ضریب پیداکول د مسألې مربوطه ورکړل شوي لومړني شرایط په دقیق ډول څېړل د پورتنیو مرحلو په پام کې نیولو سره لاندې ډیفرانسیلي معادله د تغیر تکرار منونکي میتود په مرسته په لاندې ډول حلوو:

$$ {}_{0}^{c}D_{t}^{\alpha}u + R[u] + N[u] = g(t). \qquad (۹)$$

د پورتنۍ معادلې د حل په موخه د تغیر تکرار منونکی میتود له تکراري رابطې څخه استفاده کوو:

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_{t_0}^{t} \lambda(t,s)\{(Ru_n(s) + Nu_n(s) - g(s)\}ds. \qquad (۱۰)$$

په پورتني فومول کې $\lambda(t,s)$ د لاګرانژ عمومي ضریب، u_n ,n–مرتبه تقریبي حل دی.

د لاګرانژ ضریب. د دې په موخه چې د لاګرانژ د ضریب مفهوم وڅېړو لاندې غیرې خطي ډیفرانسیلي معادلې په پام کې نیسو:

$$L[u(t)] + N[u(t)] = g(t). \qquad 0 \le t \le T \qquad (۱۱)$$

چې په پورتنۍ معادله کې $L[u(t)] = \frac{d^n u(t)}{dt^n}$ خطي اپراتور، N غیرې خطي اپراتور او $g(t)$م شخصه متمادي تابع ده. لمړی د پورتنی ډیفرانسیلي معادلې لپاره د تغیر تکرار منونکی میتود عمومي فورمول په لاندي ډول لیکو:

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_{t_0}^{t} \lambda(t,s)\{(Lu_n(s) + Nu_n(s) - g(s)\}ds, \qquad (۱۲)$$

په (۱۲) رابطه کې λ د لاګرانژ ضریب ښیي. ددې په موخه چې له (۱۲) څخه رابطي د لاګرانژ ضریب محاسبه کړو ډیفرانسیلي معادله په لاندي ډول لیکو(Tomar, 2023).

$$R = L[u(t)] + N[u(t)] - g(t), \qquad (۱۳)$$

د (۱۳) معادلې له ساده کولو څخه لیکلای شو:

$$L[u(t)] = -R + L[u(t)],$$

اوس ددې معادلې معین انتیګرال له 0 څخه تر t پورې نیسو:

$$L_1[u(t)] = \frac{d^{n-1}u(0)}{dt^{n-1}} + \int_0^t (-R + L[u(s)])ds, \qquad L_1 = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}$$

یو ځل بیا د پورتنۍ رابطې انتیګرال له 0 څخه تر t پورې نیسو:

$$L_2[u(t)] = \frac{d^{n-1}u(0)}{dt^{n-1}} + \frac{d^{n-2}u(0)}{dt^{n-2}}t + \int_0^t \int_0^x (-R + L[u(\xi)])\, dsd\xi\,, \qquad L_2 = \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}}$$

د پورتني انتیګرال د سرحداتو په تغیر کولو سره لاندې معادله حاصلیږي:

$$L_2[u(t)] = \frac{d^{n-1}u(0)}{dt^{n-1}} + \frac{d^{n-2}u(0)}{dt^{n-2}}t + \int_0^t (t-s)(-R + L[u(s)])\, ds,$$

د پورتنۍ رابطې څخه په پرله پسې ډول $(n-2)$ ځلې انتیګرال نیسو او لاندې رابطې ته رسیږو:

$$u(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{d^{j-1}u(0)}{dt^{n-1}} \cdot \frac{t^j}{j!} + \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}(-R + L[u(s)])\, ds,$$

د $\int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}(L[u(s)])\, ds = u(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{d^{j-1}u(0)}{dt^{n-1}} \cdot \frac{t^j}{j!}$ خا صیت څخه ا ستفاده کوو او د R قیمت په پورتنۍ رابطه کې وضـع کوو او لاندې اپراتور وروسـته له ترتیب څخه لاسـته راځي (Okiotor, 2020).

$$T[u(t)] = u(t) - \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\big(L[u(t)] + N[u(t)] - g(t)\big)\, ds,$$

له پورتنۍ رابطې څخه لاندې تکراري فورمول ترتیبوو او لیکو:

$$\begin{aligned} T[u_n(t)] &= u_{n+1}(t) \\ &= u_n(t) - \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\big(L[u(t)] + N[u(t)] - g(t)\big)\, ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} => u_{n+1}(t) &= u_n(t) \\ &+ \int_0^t \frac{(-1)^n(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\big(L[u(t)] + N[u(t)] - g(t)\big)\, ds. \end{aligned}$$

د پورتنۍ رابطې او تغیر تکرار منونکي فورمول له پرتلې څخه د لاګرانژ ضریب قیمت په لاندې ډول لیکل کیږي:

$$\lambda(\mathrm{t},\mathrm{s})=\frac{(-1)^{n}(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}. \qquad (۱۴)$$

یادونه. د لاگرانژ ضریب د علامې ټاکل تر ډېره د معادلې په نوعیت او همدارنگه د ورکړل شویو لومړنیو شرایطو په پام کې نیولو سره ټاکل کیږي. په داسې حال کې چې د ډېرو متجانسو کسري دیفرانسیلي معادلو لپاره د لاگرانژ ضریب علامه منفي (Bulut, 2013) او غیرې متجانسو کسري دیفرانسیلي معادلې لپاره مثبت په پام کې نیول کېږي(Belghaba, 2022) .

د تغیر تکرار منونکي میتود ځانگړنې

ساده جوړښت او آسانه محاسبه. تغیر تکرار منونکی میتود د تکراري انتگرالي فورمول پر بنسټ ولاړ دی، چې جوړښت یې ساده او مستقیم دی. دغه میتود د لاگرانژ د ضریب پر اساس یو نسبتاً دقیق تقریبي حل وړاندې کوي؛ چې له پېچلو مشتقاتو یا عددي محاسبو پرته هم دقیق حل ته نږدې کېږي. دا ساده جوړښت د دې لامل شوی، چې تغیر تکرار منونکی میتود نه یوازې د ساده معادلو لپاره، بلکې د ستونزمنو غیرې خطي کسري دیفرانسیلي معادلو لپاره هم وکارول شي(He & Wu, 2007).

د غیرې خطي معادلو لپاره اغېزمن. تغیر تکرار منونکی میتود یو له هغو میتودونو څخه دی، چې په اغېزناک ډول د غیرې خطي معادلو حل وړاندې کوي. په داسې حال کې چې ډېری نیمه تحلیلي میتودونه د غیرې خطي معادلو لپاره محدودیتونه لري. تغیر تکرار منونکی میتود د حل تکرار له لارې دغه ستونزه حلوي. دا میتود د ورکړل شویو لومړنیو شرایطو په پام کې نیولو سره د لاگرانژ ضریب محاسبه کوي او د تقریبي حل لپاره یوه سلسله رامنځته کوي، چې مرحله په مرحله دقیق حل ته نږدې کېږي او دا د هغو سېستمونو لپاره خورا گټور دی، چې غیرې خطي خاصیتونه لري (Wu, 2011).

دقیق حل ته متقاربه سلسله وړاندې کوي. د تغیر تکرار منونکي میتود ځانگړی امتیاز دا دی، چې د حل لپاره یوه داسې سلسله تولیدوي، چې که ورکړل شوی لومړنی شرط یې مناسب وي؛ نو د تکراري رابطې له لارې حل ته ژر نږدې کېږي. دا سلسله په عمومي ډول(مونوتون) یوه خوا متقاربه وي او په کم شمېر حدونو سره دقیق حل ته تقارب کو. د دې خاصیت له امله دا میتود نه یوازې دقیق دی، بلکې د محاسبوي وخت له نظره هم اغېزناک گڼل کېږي(Bassi & Ismail, 2022).

انعطاف‌پذیر دی. تغیر تکرار منونکی میتود د انعطاف‌پذیر میتود په توگه پېژندل شوی؛ ځکه دا د مختلفو ډولونو دیفرانسیلي معادلو لپاره کارېږ؛ لکه معمولي، قسمي او کسري دیفرانسیلي معادلې. دا میتود همدا راز د (coupled systems delay differential equations) او (boundary value

problems) لپاره هم اغېزمن ثابت شوی. دا پراخه تطبیق دا ښيي، چې تغیر تکرار منونکی میتود د هر ډول ریاضیکي سېستمونو لپاره یو عمومي تطبیقېدونکی میتود دی(Odibat, 2007).

د تغیر تکرار منونکي میتود نیمګړتیاوې

د ورکړل شویو لومړنیو شرایطو سره حساسیت. د تغیر تکرار منونکي میتود یوه نیمګړتیا دا ده، چې د حل کیفیت او تقاربي سرعت په زیاته کچه د لومړني شرط یا ابتدایي حل تابع دي. که چېرې لومړنی شرط مناسب انتخاب نه ش؛ نو ممکن دا میتود یا خو مطلوب حل ته ونه رسېږ، یا ډېر ورو تقارب وکړي. دا خبره په ځانګړي ډول د غیرې خطي معادلو یا هغو سېستمونو کې صدق کوي، چې څو حلونه لري او که لومړنی شرط ناسم وي؛ حل ښایي غلط لوري ته لاړ شي(Bassi & Ismail, 2022).

د لاګرانژ ضریب ټاکل ممکن ستونزمن وي. که څه هم د تغیر تکرار منونکي میتود بنسټ د لاګرانژ د ضریب پر ټاکلو ولاړ دی، خو په عملي ډول د دغه ضریب د ټاکلو بهیر تل ساده نه وي. دا ضریب باید د واریشنل اصولو له مخې داسې وموندل شي، چې د حل لپاره دقیق اصلاحات ورکړي، خو د ډېرو معادلو لپاره دا کار یا تخنیکي پېچلتیا لري یا ممکن تحلیلي حل ونه لري. دا ستونزه په خاص ډول د قسمي او پېچلو کسري دیفرانسیلي معادلو لپاره زیات لیدل شوې ده(Wu, 2011).

۱- قضیه: که چېرې $u_n(t)$ د تقریبي حل n-ام حد او $u(t)$ دقیق حل وي، پس د تغیر تکرار منونکي نیمه تحلیلي میتود خطا د لاندې رابطې په مرسته پیدا کېږي.

د $k>0$ ثابت او $u_0(t)$ لومړني شرط په پام کې نیولو سره خطا په لاندې ډول لیکلای شو:

$$E_N(t)=|u(t)-u_N(t)|\le \frac{(kt)^N}{N!}C. \qquad (۱۵)$$

یادونه. په پورتنیو نامساواتو کې د k ثابت د کسري دیفرانسیلي معادلې د خطي یا غیرې خطي برخې ضریب او C د معادلې د دقیق حل لوړې مرتبې مشتق پورې اړه لري. ([He, 1999]) یعني

$$C=\max_{t\in[0,T]}\left|u^{(N)}(t)\right|. \qquad (۱۶)$$

اډومین تجزیوي میتود

اډومین تجزیوی میتود د کسري دیفرانسیلي معادلو د حل پیداکولو لپاره یو مهم نیمه تحلیلي میتود دی. دغه میتود د معادلې د لومړنیو شرایطو د شتون په صورت کې ډېر اغیزمن دی؛ یعني هغه وخت تر ډېره کارول کېږي، چې د کسري دیفرانسیلي معادلې لپاره لومړني مناسب شرایط ذکر شوي وي. دغه میتود د خطي او غیرې خطي کسري دیفرانسیلي معادلو د تقریبي حل لپاره کارول کېږي؛ په داسې حال کې چې د نوموړي میتود په مرسته خطي کسري دیفرانسیلي معادلې په آسانۍ سره د ساده عملیو په واسطه

حلولای شو. دا چې غیرې خطي کسري دیفرانسیلي معادلې غیرې خطي برخه لري او د دې برخې دساده کولو لپاره په آډومین تجزیوي میتود کې د آډومین پولینوم معرفي کېږي؛ نو دا کړنه د عملیو د زیاتوالي او پېچلتیا سبب گرځي (Al-Mazmumy, 2024)، (Wazwaz, 1999).

د آډومین تجزیوي میتود په مرسته یوه کسري دیفرانسیلي معادله په لاندې مراحلو کې حلیږي.

لاندې کسري دیفرانسیلي معادله د لومړنیو شرایطو سره په پام کې نیسو:

$$D^{\alpha}y(t) + Ry(t) + Ny(t) = g(t), \qquad (۱۷)$$

$$y^{k}(0) = c_k \qquad k = 0,1,2, \ldots, m-1 \quad , \quad m-1 < \alpha < m$$

په (۱۷) معادله کې $y(t)$ کمکي تابع، D^{α} د کاپوتو کسري مشتق اپراتور چې مرتبه یي α ده، N غیرې خطي اپراتور او R د باقیمانده خطي اپراتور چې ممکن بله مرتبه لرونکي کاپوتو کسري مشتق ولري او $g(t)$ راکړل شوې تابع ده.

د (۱۷) کسري دیفرانسیلي معادلې د حل په موخه د معادلې د دواړو لورو څخه I^{α}کسري انتیگرال چې د کاپوتو معکوس دی نیسو او لاندې معادله لاسته راځي.

$$I^{\alpha}[D^{\alpha}y(t) + Ry(t) + Ny(t)] = I^{\alpha}[g(t)], \qquad (۱۸)$$

د (۱۸) معادلې د کسري انتیگرال له محاسبې څخه وروسته لاندې معادله لاسته راځي.

$$y(t) = \sum_{n=0}^{m-1} [\, I^{\alpha}[g(t)] - [I^{\alpha}Ry(t)] - I^{\alpha}[Ny(t)], \qquad (۱۹)$$

او یا

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) = I^{\alpha}[g(t)] - \left[I^{\alpha}R\sum_{n=0}^{\infty} y_n(t)\right] - I^{\alpha}\left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)\right]. \qquad (۲۰)$$

چېرې چې A_n د آډومین پولینومونه دي، چې یوازې د غیرې خطي کسري دیفرانسیلي معادلې د غیرې خطي برخې د ساده کولو لپاره کارول کیږي او دلاندې فورمول په واسطه محاسبه کېږي (Ziada, 2021).

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[N\left(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i y_i\right)\right], \qquad \lambda = 0 \quad , \quad n = 0,1,2, \ldots. \qquad (۲۱)$$

که چېرې (۲۱) رابطې ته انکشاف ورکړو، د آډومین پولینوم قیمتونو د پیداکولو لپاره لاندې رابطې لاسته راځي:

$$A_0 = N(y_0).$$
$$A_1 = N'(y_0)y_1.$$
$$A_2 = N'(y_0)y_2 + \frac{1}{2!}N''^{(y_0)y_1^2}.$$
$$A_3 = N'(y_0)y_3 + \frac{2}{2!}N''^{(y_0)y_1y_2} + \frac{1}{3!}N'''^{(y_0)y_1^3}.$$

د یادونې وړ ده، چې د پورتنی معادلې څخه $y(t)$ حل د بې شمېره $y_n(t)$ برخو په مجموعه وېشل شوي، چیرته چې .... $n = 0,1,2,$ یعنې $y(t) = \sum_{n-0}^{\infty} y_n(t)$ دی.

د آډومین تجزیوي میتود ځانگړنې

د پیچلو غیرې خطي معادلو لپاره اغېزمن. آډومین تجزیوي میتود د خطیکسري دیفرانسیلي معادلو د حل لپاره یو قوي او اغېزمن نیمه تحلیلي میتود دی. دا میتود په ځانگړي ډول د غیرې خطي برخې د نشتون په صورت کې د تسلسل آسانه کولو او حل ته نږدې کولو لپاره ډیزاین شوی، چې د پېچلو معادلو د نسبتاً دقیق حل موندلو کې مرسته کوی(Adomian, 1988) .

د مسألې خطي والي ته اړتیا نلرل. د آډومین تجزیوي میتود اغېزمنتیا دا ده، چې دا میتود اړتیا نه لري، تر څو مسئله لومړي خطي ته واړول شي. دا د میتود ځانگړتیا ده، چې مستقیم د اصلي غیرې خطي مسئلې پر حل تمرکز کوي او د خطي کولو له امله د حل دقت له منځه نه وړي (Al-Mazmumy et al., 2024) .

د تحلیلي سلسلې په بڼه حل ورکوي. آډومین تجزیوي میتود د معادلې حل د تحلیلي سلسلې په شکل وړاندې کوي، چې دا د حل تحلیلي بڼه ښیي او د معادلې د نوعیت په اړه پوره معلومات ورکوي؛ چې دا د حل دقیقوالي او پوهېدنې له پلوه یوه مهمه ځانگړنه ده(Rach, 1999).

د آډومین تجزیوي میتود نیمگړتیاوې

د آډومین پولینومونو محاسبه ستونزمنه ده. د آډومین تجزیوي میتود یو لوی چېلېنج د آډومین پولینومونو محاسبه ده؛ کوم چې د غیرې خطي برخو د تسلسل جوړولو لپاره کارول کېږي. دا پولینومونه په ځانگړو مسئلو کې ډېرې پېچلې محاسبې غواړي، چې ځینې وخت ستونزمن او زیات وخت ته اړتیا لري(Rach, 1999).

تقرب ممکن ورو وي. دا چې آډومين تجزيوي ميتود تقريبي حل وړانديې کوي؛ ممکن د ځينو معادلو لپاره د حل د سلسلې تقرب ورو وي او اړتيا وي، چې د تسلسل ډېر حدونه محاسبه شي، چې دا کړنه د محاسبې سرعت ټيټوي او د خطا د زياتوالي سبب ګرځي(Gejji & Jafari, 2005).

د لومړنيو شرايطو سره حساسيت. آډومين تجزيوي ميتود هم لکه ځينې نور نيمه تحليلي ميتودونه د ورکړل شويو لومړنيو شرايطو د کيفيت سره حساس دی. يعنې که چېرې د لومړنيو شرايطو تخمين ناسم وي تقريبي حل ممکن دقيق حل ته د تقارب پر ځای متباعد شي، چې ياده کړنه د تقريبي حل دقت کموي او د خطا د زياتوالي سبب ګرځي(Y, 1998) .

۲ـ قضيه: که چېرې $u_n(t)$ د تقريبي حل n-ام حد او $u(t)$ دقيق حل وي، پس د آډومين تجزيوي نيمه تحليلي ميتود خطا د لاندې رابطې په مرسته پيدا کېږي.

$$E_N = |u(t) - u_N(t)| \le \frac{(|\lambda| t^{\alpha})^{N+1}}{(N+1)!} e^{|\lambda| t^{\alpha}}. \qquad (۲۲)$$

ثبوت: که چيري د آډومين تجزوي ميتود په مرسته د پيداشوي حل سلسله په $u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$ شـکل وي او د ميتود په مرسـته n- شـمېر حدونه محاسـبه شـوي وي؛ نو تقريبي حل به يې $u_N(t) = \sum_{n=0}^{N} u_n(t)$ وي(Abdelrazec, 2008) .

د پورتنيو دوو سلسلو څخه خطا په لاندې ډول پيداکېږي:

$$E_N = |u(t) - u_N(t)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) - \sum_{n=0}^{N} u_n(t)\right| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n(t)\right|.$$

که فرض کړو $u_n(t) \le \frac{(|\lambda| t^{\alpha})^n}{n!}$ (چې اکثره وخت دا فرضيه د کاپوتو مشتق سره کارېږي) نو:

$$E_N = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n(t)\right| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} |u_n(t)| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(|\lambda| t^{\alpha})^n}{n!} e^{|\lambda| t^{\alpha}}.$$

توضيحي مثالونه

ددې په موخه چې پورتني دوه نيمه تحليلي ميتودونه د خطي او غيرې خطي کسري ديفرانسيلي معادلو لپاره په ښه ډول پرتله کړو دلته دوه عددي مثالونه په پام کې نيسو او خطاء يې د قضيو په مرسته محاسبه کوو.

۱ـ مثال: لاندې خطي کسري ديفرانسيلي معادله د تغير تکرار منونکي او آډومين تجزيوي نيمه تحليلي ميتودونو په مرسته حل کړې او وښاياست چې د نوموړې کسري ديفرانسيلي معادلې د تقريبي حل لاسته راوړلو لپاره کوم نيمه تحليلي ميتود ډېر اغېزمن دی؟

$$D^{\alpha}u(t) + 2u(t) = t \quad , \quad u(0) = 0 \quad , \qquad 0 < \alpha \leq 1 \quad , \quad t \in [0,2]$$

حل: لومړی د پورتنۍ معادلې لومړني څو حدونه محاسبه کوو، وروسته د خطا فورمول او راکړل شوي دقيق حل په مرسته ياد ميتود څېړو.

پورتنۍ معادله کې $L = D^{\alpha}$- د کسري مشتق اپراتور $R = 2y(t)$ د معادلې خطي برخه او $g(t) = t$ راکړل شوې کمکی تابع ده.

پورتنی مثال لومړی په آډومين نيمه تحليلي ميتود حلوو:

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

د تقريبي حل لپاره د پورتنۍ سلسلي حدونه په لاندې ډول محاسبه کوو:

$$D^{\alpha}u(t) + 2u(t) = t \Rightarrow L\,u(t) = -2u(t) + t$$

$$u(t) = -I^{\alpha}[2u(t)] + I^{\alpha}[t]$$

$$u_0(t) = 0$$

$$u_1(t) = I^{\alpha}[t - 2u_0] = I^{\alpha}[t - 0] = I^{\alpha}[t] = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(1+\alpha+1)} t^{\alpha+1}$$

$$\Rightarrow u_1(t) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+2)} t^{\alpha+1}$$

د پورتنۍ الگو ريتم په مرسته د نوموړي ديفرانسيلي معادلې د تقريبي حل نور حدونه په لاندې ډول دي.

$$u_2(t) = -\frac{2\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+2)} t^{2\alpha+1}$$

$$u_3(t) = \frac{4}{\Gamma(3\alpha+2)} t^{3\alpha+1}$$

$$\vdots$$

$$u(t) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} t^{\alpha+1} - \frac{2}{\Gamma(2\alpha+2)} t^{2\alpha+1} + \frac{4}{\Gamma(3\alpha+2)} t^{3\alpha+1} \ldots$$

اوس يې د خطاء فورمول په مرسته خطاء په لاندې ډول محاسبه کوو:

$$E_N = |u(t) - u_N(t)| \leq \frac{(|\lambda| t^{\alpha})^{N+1}}{(N+1)!} e^{|\lambda| t^{\alpha}}$$

$$E_1(1) = |u(1) - u_1(1)| \leq \frac{(|2|t^{0.9})^{1+1}}{(1+1)!} e^{|2|t^{0.9}} = \frac{4t^{3.6}}{2!} e^{|2|t^{0.9}} = 14.6882$$

په همدې ترتیب د نورو حدونو لپاره خطاء په لاندې ډول ده:

$$E_2(1) = 9.7921$$

$$E_3(1) = 4.8960$$

$$=> E_1(t) > E_2(t) > E_3(t) > \cdots => \quad 4.8960 > 9.7921 > 14.6882$$

د آډومین میتود په مرسته د خطا د پورتنیو سرحدونو یو متقارب ردیف حاصل شو؛ نو ویلی شو چې د زیات شمیر حدونو په پیداکولو سره دقیق حل ته لاس ور نیږدې کېږي.

اوس پورتنۍ کسري دیفرانسیلي معادله د تغیر تکرار منونکي میتود په مرسته حلوو او خطا یې تحلیلوو.

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_{t_0}^{t} \lambda(t,s)\{(Ru_n(s) + Nu_n(s) - g(s)\}ds$$

$$\lambda(t-s) = \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad , \qquad u(0) = 0 => u_0(t) = 0$$

$$u_1(t) = u_0(t) + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\{D^\alpha u_0(s) + 2u_0(s) - s\}ds$$

$$= 0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\{D^\alpha(0) + 2(0) - s\}ds$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s ds = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{1+\alpha-1+1} B(1+1, \alpha-1+1) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} B(2,\alpha)\, t^{\alpha+1}$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(2)}{\Gamma(\alpha+2)}\, t^{\alpha+1} => u_1(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha+2)}\, t^{\alpha+1}$$

د پورتني الگوریتم په مرسته د نوموړې دیفرانسیلي معادلې د تقریبي حل نور حدونه په لاندې ډول دي:

$$u_2(t) = -\frac{2}{\Gamma(2\alpha+2)} t^{2\alpha+1} - \frac{3}{\Gamma(\alpha+2)}\, t^{\alpha+1}$$

$$u_3(t) = -\frac{4}{\Gamma(3\alpha+2)} t^{3\alpha+1} - \frac{10}{\Gamma(2\alpha+2)} t^{2\alpha+1} - \frac{7}{\Gamma(\alpha+2)}\, t^{\alpha+1}$$

$$\mathrm{u}(t) = u_0(t) + u_1(t) + u_2(t) + \cdots$$

$$\mathrm{u}(t) = -\frac{4}{\Gamma(3\alpha+2)} t^{3\alpha+1} - \frac{12}{\Gamma(2\alpha+2)} t^{2\alpha+1} - \frac{11}{\Gamma(\alpha+2)}\, t^{\alpha+1} + \cdots$$

د تغیر تکرار منونکي میتود خطاء په لاندې ډول محاسبه کوو:

$$k = 2 \quad , \quad C = \max_{t\in[0,T]} \left|u^{(N)}(t)\right| = \max_{t\in[0,T]} \left|\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}(1 - e^{-2t})\right)^{(N)}\right|$$

$$N = 1 => C = \max_{t\in[0,2]} \left|\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}(1 - e^{-2t})\right)'\right| = \max_{t\in[0,2]} \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(2e^{-2t})\right|$$

$$= \max_{t\in[0,2]} \left|\frac{1}{2}(1 + e^{-2t})\right| = 1$$

$$E_N(t) = |u(t) - u_N(t)| \leq \frac{(kt)^N}{N!}C$$

$$E_1(1) = |u(1) - u_1(1)| \leq \frac{(kt)^1}{1!}C = C(kt) = 1 \cdot 2t = 2$$

په همدي ترتیب د نورو حدونو لپاره خطاء په لاندې ډول ده:

$$E_2(1) = 2$$

$$E_3(1) = 2.6666$$

$$E_1 = E_2 < E_3$$

د پورتني غیرې خطي کسري دیفرانسیلي معادلې د تغیر تکرار منونکي او آډومین تجزیوي نیمه تحلیلي میتودونو خطا په لاندې جدول کی په لنډ ډول د مقایسی په موخه لیکو:

جدول ۱: د تغیر تکرار منونکي او آډومین تجزیوي میتودونو خطاء

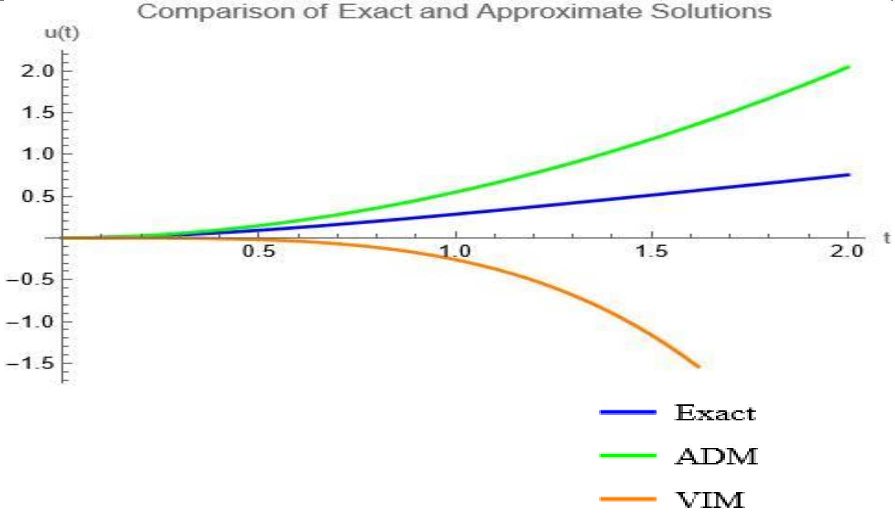
آډومین تجزیوي میتود	واریشنل آیتریشن میتود	د حد خطاء
14.688	2.000	$E_1(t)$
9.792	2.000	$E_2(t)$
4.896	2.666	$E_3(t)$

د پورتني نتیجې د لاښه وضاحت په موخه د یادې خطي کسري دیفرانسیلي معادلې ګراف او جدول په لاندي ډول ښیو:

جدول۲: د $\alpha = 0.9$ لپاره د تغیر تکرار منونکي او آډومین تجزیوي میتودونو قیمتونه او خطاء

تغییر تکرار منونکی میتود خطاء	تغییر تکرار منونکی میتود($\alpha = 0.9$)	د آډومین میتود خطاء	آډومین میتود ($\alpha = 0.9$)	دقیق حل ($\alpha = 1$)	t
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.00
0.0047	-0.00005	0.0022	0.0068	0.0046	0.10
0.0182	-0.0006	0.0081	0.0257	0.0175	0.20
0.0402	-0.0030	0.0183	0.0555	0.0372	0.30
0.0710	-0.0087	0.0336	0.0959	0.0623	0.40
0.1119	-0.0199	0.0546	0.1466	0.0919	0.50
0.1644	-0.0391	0.0820	0.2073	0.1252	0.60
0.2309	-0.0692	0.1162	0.2778	0.1616	0.70
0.3139	-0.1135	0.1576	0.3581	0.2004	0.80
0.4168	-0.1755	0.2066	0.4479	0.2413	0.90
0.5430	-0.2592	0.2634	0.5472	0.2838	1.00

1.10	0.3277	0.6558	0.3281	-0.3688	0.6965
1.20	0.3726	0.7737	0.4011	-0.5088	0.8815
1.30	0.4185	0.9008	0.4823	-0.6842	1.1028
1.40	0.4652	1.0371	0.5718	-0.9001	1.3653
1.50	0.5124	1.1823	0.6699	-1.1619	1.6744
1.60	0.5601	1.3366	0.7764	-1.4753	2.0355
1.70	0.6083	1.4997	0.8914	-1.8463	2.4547
1.80	0.6568	1.6718	1.0150	-2.2812	2.9380
1.90	0.7055	1.8527	1.1471	-2.7863	3.4919
2.00	0.7545	2.0423	1.2877	-3.3687	4.1233



انځور۱: د میتودونو مقایسوي ګراف

له پورتنیو جدولونو او ګراف څخه په ښکاره ډول لیدل کیږي، چې د آډومین تجزیوي میتود د خطا ترادف نسبت د تغیر تکرار منونکي میتود ته په سرعت سره د صفر لوري ته تقارب کوي. په نتیجه کې ویلی شو، چې د پورتنیو خطي کسري دیفرانسیلي معادلو د حل لپاره آډومین تجزیوي میتود نسبت تغیر تکرار منونکي میتود ته ډېر اغېزمن دی او د خطاء اندازه یې کمه ده.

۲ـ مثال: لاندې غیرې خطي کسري دیفرانسیلي معادله د تغیر تکرار منونکي او آډومین تجزیوي نیمه تحلیلي میتودونو په مرسته حل کړئ او وښایاست چې د نوموړې کسري دیفرانسیلي معادلې د تقریبي حل لاسته راوړلو لپاره کوم نیمه تحلیلي میتود ډېر اغېزمن دی؟

$$D^{\alpha}u(t)+u(t)^2=t^2 \quad , \quad u(0)=0 \quad , \quad 0<\alpha\le 1$$

حل: لومړی پورتنۍ غیرې خطي کسري دیفرانسیلي معادله د آډومین تجزیوي میتود په مرسته حلوو.

$$D^{\alpha}u(t)+u(t)^2=t^2 \quad , \quad u(0)=0 \quad , \quad 0<\alpha\le 1$$

$$D^{\alpha}u(t)=t^2-u(t)^2 => I^{\alpha}[D^{\alpha}u(t)]=I^{\alpha}[t^2-u(t)^2] => u(t)=I^{\alpha}[t^2-u(t)^2]$$

$$u(t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(t) \quad , \quad N[u(t)]=u(t)^2=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(t)$$

$$\begin{cases} u_0(t) = I^\alpha[g(t)] \\ u_{n+1}(t) = -I^\alpha\big[R\big(u_n(t)\big)\big] - I^\alpha[A_n(t)] \end{cases}$$

$$u_0(t) = I^\alpha[g(t)] = I^\alpha[t^2] = \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(\alpha+3)} t^{\alpha+2} => u_0(t) = \frac{2}{\Gamma(\alpha+3)} t^{\alpha+2}$$

$$u_1(t) = -I^\alpha\big[R\big(u_0(t)\big)\big] - I^\alpha[A_0(t)] = 0 - I^\alpha[A_0(t)] = -I^\alpha[A_0(t)]$$

$$A_0 = N(u_0) = \left(\frac{2}{\Gamma(\alpha+3)} t^{\alpha+2}\right)^2 = \frac{4}{\Gamma(\alpha+3)^2} t^{2\alpha+4}$$

$$u_1(t) = -I^\alpha[A_0(t)] = -I^\alpha\left[\frac{4}{\Gamma(\alpha+3)^2} t^{2\alpha+4}\right]$$

$$= -\frac{4}{\Gamma(\alpha+3)^2} \frac{\Gamma(2\alpha+4+1)}{\Gamma(2\alpha+4+\alpha+1)} t^{3\alpha+4}$$

$$=> u_1(t) = -\frac{4\,\Gamma(2\alpha+5)}{\Gamma(\alpha+3)^2\Gamma(3\alpha+5)} t^{3\alpha+4}$$

د پورتني الگوریتم په مرسته د نوموړې دیفرانسیلي معادلې د تقریبي حل نور حدونه په لاندې ډول دي:

$$u_2(t) = \frac{16\,\Gamma(2\alpha+5)\Gamma(4\alpha+7)}{\Gamma(\alpha+3)^3\Gamma(3\alpha+5)\Gamma(5\alpha+7)} t^{5\alpha+7}$$

.
.
.

$$u(t) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

$$u(t) = \frac{2}{\Gamma(\alpha+3)} t^{\alpha+2} - \frac{4\,\Gamma(2\alpha+5)}{\Gamma(\alpha+3)^2\Gamma(3\alpha+5)} t^{3\alpha+4} + \frac{16\,\Gamma(2\alpha+5)\Gamma(4\alpha+7)}{\Gamma(\alpha+3)^3\Gamma(3\alpha+5)\Gamma(5\alpha+7)} t^{5\alpha+7} + ..$$

$$E_N = |u(t) - u_N(t)| \le \frac{(|\lambda| t^\alpha)^{N+1}}{(N+1)!} e^{|\lambda| t^\alpha}$$

$$E_1 = |u(1) - u_1(1)| \le \frac{(|1| t^{0.9})^{1+1}}{(1+1)!} e^{|1| t^{0.9}} = \frac{(t^{0.9})^2}{2!} e^{t^{0.9}} = 1.57$$

په همدې ترتیب د نورو حدونو لپاره خطاء په لاندې ډول ده:

$$E_2 = 0.52$$

$$E_3 = 0.13$$

$$E_1 > E_2 > E_3 => 1.57 > 0.52 > 0.13$$

اوس پورتني غیرې خطي کسری دیفرانسیلي معادله د تغیر تکرار منونکي میتود په مرسته حلوو:

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_{t_0}^{t} \lambda(t,s)\{(Ru_n(s) + Nu_n(s) - g(s)\} ds$$

$$\lambda(t-s)=\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\ , \qquad u(0)=0 => u_0(t)=0$$

$$u_1(t)=0+\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\{D^{\alpha}(0)+(0)^2-s^2\}ds$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\{s^2\}ds$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\{s^2\}ds=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}t^{2+\alpha-1+1}B(2+1,\alpha-1+1)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}B(3,\alpha)\,t^{\alpha+2}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(3)}{\Gamma(\alpha+3)}t^{\alpha+2}=\frac{2}{\Gamma(\alpha+3)}t^{\alpha+2}$$

$$=> u_1(t)=\frac{2}{\Gamma(\alpha+3)}t^{\alpha+2}$$

د پورتني الګوریتم په مرسته د نوموړې دیفرانسیلي معادلې د تقریبي حل نور حدونه په لاندې ډول دي:

$$u_2(t)=\frac{2}{\Gamma(\alpha+3)}t^{\alpha+2}+\frac{4}{\Gamma(\alpha+3)^2}\frac{\Gamma(2\alpha+5)}{\Gamma(3\alpha+5)}t^{3\alpha+4}$$

$$u_3=\frac{2}{\Gamma(\alpha+3)}t^{\alpha+2}+\frac{12\,\Gamma(2\alpha+5)}{\Gamma(\alpha+3)^2\Gamma(3\alpha+5)}t^{3\alpha+4}$$

$$+\frac{16\,\Gamma(2\alpha+5)\Gamma(4\alpha+7)}{\Gamma(\alpha+3)^3\Gamma(3\alpha+5)\Gamma(5\alpha+7)}t^{5\alpha+6}$$

$$++\frac{16\,\Gamma(2\alpha+5)^2\Gamma(7\alpha+9)}{\Gamma(\alpha+3)^4\Gamma(3\alpha+5)^2\Gamma(8\alpha+7)}t^{7\alpha+8}$$

$$\vdots$$

$$u(t)=u_0(t)+u_1(t)+u_2(t)+\cdots$$

$$u(t)=\frac{6}{\Gamma(\alpha+3)}t^{\alpha+2}+\frac{16\,\Gamma(2\alpha+5)}{\Gamma(\alpha+3)^2\Gamma(3\alpha+5)}t^{3\alpha+4}$$

$$+\frac{16\,\Gamma(2\alpha+5)\Gamma(4\alpha+7)}{\Gamma(\alpha+3)^3\Gamma(3\alpha+5)\Gamma(5\alpha+7)}t^{5\alpha+6}$$

$$+\frac{16\,\Gamma(2\alpha+5)^2\Gamma(7\alpha+9)}{\Gamma(\alpha+3)^4\Gamma(3\alpha+5)^2\Gamma(8\alpha+7)}t^{7\alpha+8}$$

$$E_N(t)=|u(t)-u_N(t)|\le\frac{(kt)^N}{N!}C$$

$$C=\max_{t\in[0,T]}\left|u^{(N)}(t)\right|$$

$$N=1 \qquad C=\max_{t\in[0,2]}|u'(t)|=\max_{t\in[0,2]}\left|\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{63}t^7+\frac{2}{2079}t^{11}\right)'\right|$$

$$=\max_{t\in[0,2]}\left|\left(t^2-\frac{1}{9}t^6+\frac{2}{189}t^{10}\right)\right|=2^2-\frac{1}{9}2^6+\frac{2}{189}2^{10}$$

$$=4-\frac{64}{9}+\frac{2048}{189}=\frac{756-1344+2048}{189}=\frac{1460}{189}=7.72$$

$$E_1(t) = |u(1) - u_1(1)| \leq \frac{(1 \cdot t)^1}{1!} 7.72$$

په همدې ترتیب د نورو حدونو لپاره خطاء په لاندې ډول ده:

$$E_2(1) = 18.42 \qquad E_3(1) = 32.07$$

د پورتنۍ غیرې خطي کسري دیفرانسیلي معادلې د واریشنل آیټریشن او آډومین تجزیوي نیمه تحلیلي میتودونو خطاء په لاندې جدول کې په لنډ ډول د مقایسې په موخه لیکو:

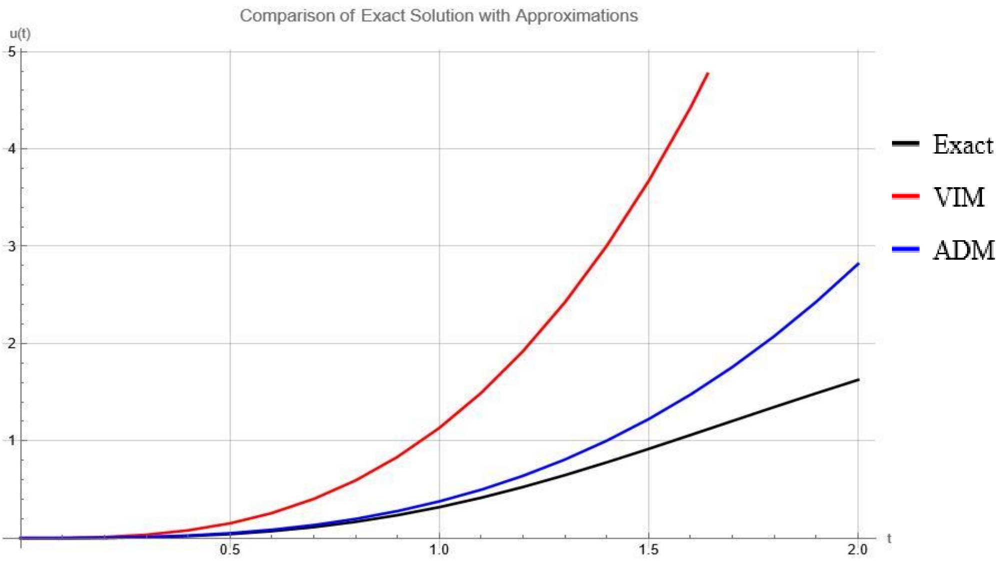
جدول۳: د وрایشنل آیټریشن او آډومین تجزیوي میتودونو خطاء

د حد خطاء	واریشنل آیتریشن میتود		آډومین تجزیوي میتود		
t	دقیق حل $(\alpha = 1)$	آډومین میتود $(\alpha = 0.9)$	د آډومین میتود خطا	تغیر تکرار منونکی میتود $(\alpha = 0.9)$	تغیر تکرار منونکی میتود خطا
0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.10	0.0003	0.0004	0.0001	0.0014	0.0010
0.20	0.0026	0.0035	0.0008	0.0106	0.0079
0.30	0.0089	0.0114	0.0024	0.0344	0.0254
0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0.50	0.0415	0.0505	0.0090	0.1516	0.1101
0.60	0.0715	0.0857	0.0142	0.2573	0.1858
0.70	0.1130	0.1341	0.0211	0.4024	0.2894
0.80	0.1674	0.1975	0.0301	0.5927	0.4253
0.90	0.2356	0.2780	0.0423	0.8341	0.5984
1.00	0.3183	0.3774	0.0590	1.1322	0.8138
1.10	0.4152	0.4975	0.0823	1.4926	1.0774
1.20	0.5254	0.6403	0.1149	1.9211	1.3956
1.30	0.6473	0.8076	0.1603	2.4230	1.7756
1.40	0.7788	1.0013	0.2225	3.0040	2.2251
1.50	0.9171	1.2231	0.3059	3.6694	2.7522
1.60	1.9596	1.4748	0.4152	4.4246	3.3649
1.70	1.2037	1.7583	0.5546	5.2751	4.0713
1.80	1.3472	2.0753	0.7281	6.2261	4.8789
1.90	1.4883	2.4277	0.9393	7.2830	5.7947
2.00	1.6259	2.8170	1.1911	8.4511	6.8252

$E_1(t)$	7.72	1.57
$E_2(t)$	18.42	0.52
$E_3(t)$	32.07	0.13

ځلورم جدول: د $\alpha = 0.9$ لپاره د تغیر تکرار منونکي او آډومین تجزیوي میتودونو قیمتونه او خطاء

د پورتني نتیجي د لاښه وضاحت په موخه د یادي غیرې خطي کسري دیفرانسیلي معادلې ګراف او جدول په لاندې ډول ښیو:



شکل ۲ : د میتودونو مقایسوي ګراف

له پورتنیو جدولونو او ګراف څخه په ښکاره ډول لیدل کېږي، چې د آدومین تجزیوي میتود د خطاء ترادف نسبت د تغیر تکرار منونکي میتود ته په سرعت سره د صفر لوري ته تقرب کوي. په نتیجه کې ویلی شو، چې د پورتنۍ غیرې خطي کسري دیفرانسیلي معادلو د حل لپاره آدومین تجزیوي میتود نسبت تغیر تکرار منونکي میتود ته ډېر اغېزمن دی او د خطاء اندازه یې کمه ده.

یادونه. د دې په موخه چې د نیمه تحلیلي حلونو خطاء محاسبه کړو، هغه باید د دقیق حل سره پرتله شي او د ددې پرتلې او دقیق حل لاسته راوړلو لپاره که چېرې $\alpha = 1$ وټاکل شي؛ دا کار د حل د دقت په لوړولو کې مهم رول لري(Ozalp, 2012). نوځکه په پورتنیو مثالونو د دقیق حل لپاره د α لپاره دغه قیمت ټاکل شوی دی.

بحث او مناقشه

کسري دیفرانسیلي معادلې د انجینرۍ او فزیک په اکثریت برخو کې کارول کېږي. د دې دیفرانسیلي معادلو په مرسته کولای شو، پیچلې فزیکي او د انجینرۍ موضوعات موډل کړو(Kisela, 2008)، .(Chakraverty, 2010)

د کسري دیفرانسیلي معادلو د تقریبي حل لاسته راوړلو لپاره نیمه تحلیلي میتودونه کارول کېږي. په دې مقاله کې د کسري دیفرانسیلي معادلو د تقریبي حل لاسته راوړلو په موخه د نیمه تحلیلي میتودونو څخه یوازې دوه اغېزمن میتودونه(آدومین تجزیوي میتود او تغیر تکرار منونکی میتود) انتخاب شوي دي،

چې په نوموړو میتودونو کې د آډومین پولینوم او لاګرانژ ضریب شتون لري(He & Wu, 2007)، (Al-Mazmumy, 2024) چې د هغه په مرسته کولای شو پیچلي خطي او غیرې خطي کسري دیفرانسیلي معادلې د ساده عملیو په واسطه په کم وخت کې حل کړو.

د خطي او غیرې خطي کسري دیفرانسیلي معادلو د نیمه تحلیلي حل لاسته راوړلو لپاره دوه اغېزمن میتودونه (آډومین تجزیوي او تغیر تکرار منونکی) دي، چې هر یو یې د خاصو ځانګړنو په لرلو سره په بېلا بېلو برخو کې د کسري دیفرانسیلي معادلو د حل لپاره کارول کېږي (Chakraverty, 2010). د خطي او غیرې خطي کسري دیفرانسیلي معادلو د حل لپاره د میتود ټاکل د معادلې په ډول(خطي او غیرې خطي) اولیه شرایطو او پیچلتیا پورې اړه لري؛ یعني د دې په موخه چې یوه کسري دیفرانسیلي معادله د نیمه تحلیلي میتودونو په مرسته حل کړو، لومړی باید د پورتنیو حالاتو په پام کې نیولو سره مناسب میتود انتخاب کړو او وروسته عملیه اجراء کړو.

د خطي کسري دیفرانسیلي معادلو د حل لپاره د آډومین تجزیوي او تغیر تکرار منونکي میتودونو څخه استفاده کېږي. ځکه په خطي کسري دیفرانسیلي معادلو کې غیرې خطي برخه صفر ده او په آډومین تجزیوي میتود کې د آډومین پولینوم پیداکولو ته اړتیا نشته او د ساده عملیو په مرسته یې تقریبي حل پیداکولای شو(Al-Mazmumy et al., 2024). همدارنګه د خطي کسري دیفرانسیلي معادلو د حل لپاره د تغیر تکرار منونکي میتود عمده علت هم په معادله کې د غیرې خطي برخي نشتوالی او د ورکړل شویو اولیه شرایطو سره په ښه ډول مطابقت دی. پس پر دې اساس د تغیر تکرار منونکي میتود د لاګرانژ ضریب په مناسب ټاکلو سره مرحله په مرحله په سرعت سره دقیق حل ته نږدې (تقرب) کېږي (Wu, 2011).

د غیرې خطي کسري دیفرانسیلي معادلو د حل لپاره تر ډېره اغېزمن نیمه تحلیلي میتود تغیر تکرار منونکی میتود دی، چې د یاد میتود په مرسته غیرې خطي کسري دیفرانسیلي معادلې په آساني سره حل کېږي او همدارنګه د لاسته راغلي تقریبي حل دقت زیات او خطا هم کمه وي(Belghaba, 2022).

همدارنګه د پېچلو غیرې خطي کسري دیفرانسیلي معادلو د تقریبي حل لاسته راوړلو لپاره تغیر تکرار منونکی نیمه تحلیلي میتود هم موثر میتود دی، چې همېشه د مسألې د ورکړل شویو اولیه شرایطو سره په ښه ډول مطابقت کوي اود تکراري رابطې په مرسته مرحله په مرحله دقیق حل ته تقارب کوي (He & Wu, 2007).

د غیرې خطي کسري دیفرانسیلي معادلو دحل لپاره د آډومین میتود د اغېزمنتیا کموالی یوازینی علت د غیرې خطي برخې لپاره د آډومین پولینوم لاسته راوړل دي، چې یاده کړنه د آډومین میتود په الګوریتم

کي پیچلتیا رامنځته کوي او د تقریبي حل سلسلې تقرب په سختۍ سره دقیق حل ته تقارب کوي(Rach, 1999). همدارنګه په عددي مثالونو کې مو وښودل، چې د خطي کسري دیفرانسیلي معادلې لپاره د دواړو میتودونو خطاء کمه او دقت زیات ؤ؛ په داسې حال کې چې د آډومین تجزیوي میتود عملیې نسبت تغیر تکرار منونکي میتود ته لنډي او د حدونو د خطاء د ردیف تقارب سرعت یې زیات دی.

پایلې

په دې مقاله کې د کسري دیفرانسیلي معادلو د نوعیت، اولیه شرایطو او د خطاء کموالي معیار په پام کې نیولو سره دوه نیمه تحلیلي میتودونه(آډومین تجزیوي میتود او تغیر تکرار منونکی) پرتله شوي دي. د یادو نیمه تحلیلي میتودونو د ځانګړنو، نیمګړتیاوو او خطاء کموالي په پام کې نیولو سره د بېلابېلو کسري دیفرانسیلي معادلو لپاره په مختلفو شرایطو کې د حل لپاره میتودونه مشخص شوي دي. که چېرې د معادلې نوعیت ته په کتلو او اولیه شرایطو په پام کې نیولو سره د حل لپاره مناسب میتود انتخاب شي، د لاسته راغلي حل دقت به زیات او خطاء به یې کمه وي او همدارنګه د بې ځایه عملیو د تر سر کولو او وخت د ضایع کېدو څخه به مخنیوی شوی وي.

د خطي کسري دیفرانسیلي معادلو د حل لپاره آډومین او تغیر تکرار منونکی دواړه اغېزمن میتودونه دي. د آډومین میتود اغېزمنتیا دا ده، چې په نوموړو معادلو کې غیرې خطي برخه صفر وي؛ نو د آډومین پولینومونو محاسبې ته اړتیا نشته او د ساده عملیو په مرسته یې دقیق حل پیداکېږي. تغیر تکرار منونکی میتود د کسري دیفرانسیلي معادلو د حل لپاره د لاګرانژ ضریب معرفي کوي، چې د هغه د دقیق قېمت په ټاکلو سره د تکراري رابطې په مرسته په آسانۍ سره اصلي حل ته تقرب کوي.

د غیرې خطي کسري دیفرانسیلي معادلو د تقریبي حل لاسته راوړلو لپاره تغیر تکرار منونکی میتود ډېر اغېزمن دی، چې د دقیق لاګرانژ ضریب په ټاکلو سره د تکراري رابطې په مرسته په آسانۍ سره دقیق حل ته تقرب کوي. د غیرې خطي کسري دیفرانسیلي معادلې لپاره د آډومین میتود ستونزه د غیرې خطي برخې لپاره د آډومین پولینوم محاسبه کول دي، چې د پیچلو عملیو او وخت د ضایع کېدو سبب ګرځي.

مننه او قدرداني

موږ د کابل پوهنتون د ریاضیاتو له پوهنځي مننه کوو، چې د دې مقالې په لیکلو کې یې زموږ سره تخنیکي او علمي مرسته وکړه. د دوی همکاري او لارښوونې زموږ د څېړنیز کار د پیاوړتیا لپاره بنسټیز رول ولوبوه.

د لیکوالانو ونډه

عبدالوکیل بیدار د دې مقالې مفهوم وړاندې کړئ او د علمي کارونو څخه یې نظارت ترسره کړی. محمد اسلم صالحي او نورالله نوري لومړني معلومات ترتیب کړي او درې واړه لیکوالانو په مساوي ډول د معلوماتو کتنه او تحلیل ترسره کړی دی.

د ګټو ټکر

لیکوالان تصدیق کوي، چې د دې مقالې په تړاو هڅ ډول د ګټو ټکر شتون نه لري.

ماخذونه

Abdelrazec, A. H. (2008). *Adomian Decomposition Method: Convergence Analysis and Numerical Approximations* (Master's thesis). McMaster University. https://macsphere.mcmaster.ca/handle/11375/21346

Adomian, G. (1988). A review of the decomposition method in applied mathematics. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 135*(2), 501–544. https://doi.org/10.1016/0022-247X(88)90170-9

Al-Mazmumy, M. A. (2024). Efficient modified Adomian decomposition method for solving nonlinear fractional differential equations. *International Journal of Analysis and Applications*. https://doi.org/10.5899/ijaa.2024.2291-8639

Chakraverty, S., & M., R. (2023). Computational fractional dynamical systems. USA: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-29007-7

Chauhan, J. P., & S. (2023). A semi-analytic method to solve nonlinear differential equations with arbitrary order. *Results in Control and Optimization, 12*, 1–12. https://doi.org/10.3934/rco.2023.12

Guo, P. (2019). Adomian decomposition method for a type of fractional differential equations. *Journal of Applied Mathematics and Physics, 7*(10), 2459–2466. https://doi.org/10.4236/jamp.2019.710166

He, J. H. (1999). Variational iteration method – a kind of nonlinear analytical technique: Some examples. *International Journal of Nonlinear Mechanics, 34*(4), 699–708. https://doi.org/10.1016/S0020-7462(98)00048-1

He, J. H. (1999). Variational iteration method – a kind of nonlinear analytical technique: Some examples. *International Journal of Nonlinear Mechanics, 34*(4), 699–708. https://doi.org/10.1016/S0020-7462(98)00048-1

He, J., & Wu, X.-H. (2007). Variational iteration method: New development and applications. *Computers & Mathematics with Applications, 54*, 881–894. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2007.05.003

Ismail, N. M. (2022). The modified variational iteration method to solve linear fractional differential equations. *Journal of Advances in Mathematics and Computer Science, 37*(8), 57–64. https://doi.org/10.9734/JAMCS/2022/v37i830472

Kisela, T. (2008). *Fractional differential equations and their applications*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-540-76574-5

Kisela, T. (2008). Fractional differential equations and their applications. Springer.

Mainardi, R. G. (2008). *Fractional calculus: Integral and differential equations of fractional order*. Udine, Italy: Springer.

Okiotor, F. O. N. (2020). On the computation of the Lagrange multiplier for the variational iteration method (VIM) for solving differential equations. *Journal of Advances in Mathematics and Computer Science, 35*(3), 74–92. https://doi.org/10.9734/JAMCS/2020/v35i330174

Wazwaz, A. M. (2009). Partial differential equations and solitary waves theory. Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-68608-8

Wazwaz, A. M. (2010). Linear and nonlinear integral equations: Methods and applications. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1600-3

Wazwaz, A. M. (2011). A reliable modification of the Adomian decomposition method. *Applied Mathematics and Computation*, *217*(12), 5385–5393. https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.03.081

Wu, J. (2008). Variational iteration method: New development and applications. *Computers & Mathematics with Applications*, *44*(7–8), 877–894. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2007.03.005

Wu, J., & Wu, J. A. (2007). Variational iteration method: New development and applications. *Computers & Mathematics with Applications*,*54*(7–8),881–894. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2007.05.003

Zill, D. G., & Rettig, M. R. (2009). *Differential equations with boundary-value problems* (8th ed.). Brooks/Cole.
(Printed book — no DOI.)