



## بررسی دقت حل عددی معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه کسری نوع کاپوتو با

### استفاده از روش پیش‌بینی-تصحیح‌کننده

محمدجعفر حیدری<sup>۱</sup>، نورالله نوری<sup>۲</sup>، عبدالوکیل بیدار<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup>دپارتمنت ریاضیات، پوهنځی تعلیم و تربیه، پوهنتون تخار، تالقان، افغانستان

<sup>۲،۳</sup>دپارتمنت ریاضیات، پوهنځی ریاضیات، پوهنتون کابل، کابل، افغانستان

ایمیل: jafarkohistany315@gmail.com

#### چکیده

در این مقاله، دقت روش عددی پیش‌بینی-تصحیح‌کننده برای حل معادلات دیفرانسیل خطی با مشتق کسری نوع کاپوتو مورد بررسی قرار گرفته است. مشتقات کسری به تعریف کاپوتو به‌خاطر توانایی‌شان در مدل‌سازی پدیده‌هایی که دارای حافظه و وابستگی زمانی‌اند، در سیستم‌های فیزیکی و انجینیری اهمیت خاصی دارند. هدف این تحقیق، بررسی مؤثریت و دقت روش پیش‌بینی-تصحیح‌کننده در حل معادلات دیفرانسیل کسری خطی می‌باشد. برای این منظور، نخست ساختار این روش عددی معرفی شده و سپس در حل چندین مثال عددی شامل معادلات متجانس و غیرمتجانس به کار گرفته شده است. نتایج به‌دست آمده با حل تحلیلی مقایسه گردیده و جدول‌ها و گراف‌های مقایسه‌ی جهت ارزیابی دقت روش ارائه شده‌اند. یافته‌ها نشان داد که روش پیش‌بینی-تصحیح‌کننده از دقت خوبی برخوردار بوده و می‌توان آن را به عنوان یک روش مؤثر برای حل عددی معادلات دیفرانسیل کسری با شرایط اولیه‌ی کلاسیک در نظر گرفت.

**واژه‌های کلیدی:** تبدیل لاپلاس؛ تقریب عددی؛ معادلات دیفرانسیل کسری؛ مشتق کاپوتو؛ روش پیش‌بینی-تصحیح‌کننده

## Accuracy Analysis of the Numerical Solution of Linear Fractional-Order Differential Equations of Caputo Type Using the Predictor-Corrector Method

Mohammad Jafar Haidari<sup>1</sup>, Noorullah Noori<sup>2</sup>, Abdul Wakil Baidar<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Department of Mathematics, Education Faculty, Takhar University, Taloqan, Af

<sup>2,3</sup>Department of Mathematics, Faculty of Mathematics, Kabul University, Kabul, Af

Email: jafarkohistany315@gmail.com

#### Abstract

This paper investigates the accuracy of the Predictor–Corrector numerical method for solving linear differential equations with Caputo-type fractional derivatives. Fractional derivatives defined in the sense of Caputo are particularly important due to their ability to model memory and time-dependent behaviors in physical and engineering systems. The aim of this study is to evaluate the efficiency and accuracy of the Predictor–Corrector method in solving linear fractional differential equations. To achieve this, the structure of the method is first introduced, and then it is applied to several numerical examples, including both homogeneous and nonhomogeneous equations. The numerical results are compared with analytical solutions, and tables and comparative graphs are presented to assess the method's accuracy. The findings indicate that the Predictor–Corrector method provides reliable and accurate results and can be considered an effective approach for numerically solving linear fractional differential equations with classical initial conditions.

**Keywords:** Caputo Derivative; Fractional Differential Equations; Laplace Transform; Numerical Approximation; Predictor-Corrector Method

**ارجاع:** حیدری، م. ج.، نوری، ن. و بیدار، ع. (۱۴۰۴). بررسی دقت حل عددی معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه کسری نوع کاپوتو با

استفاده از روش پیش‌بینی-تصحیح‌کننده. مجله علمی- تحقیقی علوم طبیعی پوهنتون کابل، ۳۱، ۵۶-۵۹

<https://doi.org/10.62810/jns.v8i3.439>

الحمد لله رب العالمين و الصلوة و السلام على سيد المرسلين و على آله و اصحابه اجمعين.

معادلات دیفرانسیل کسری به عنوان تعمیمی از معادلات دیفرانسیل معمولی، در سال‌های اخیر توجه فراوانی را در زمینه‌های مختلف ساینس و انجینری به خود جلب کرده‌اند. این معادلات که مشتق‌های کسری را شامل می‌شوند، قادرند پروسه‌های پیچیده طبیعی و انجینری را که در آن‌ها حافظه و اثرات به گذشته اهمیت دارد، با دقت بیشتری مدل‌سازی کنند (Podlubny, 1999). در میان تعاریف مختلف مشتق کسری، مشتق کسری کاپوتو<sup>۱</sup> و به دلیل ویژگی‌های فیزیکی مناسب و شرایط اولیه قابل فهم‌تر، به طور گسترده‌یی در مسایل تطبیقی به کار می‌رود (Caputo, 1967; Kilbas et al., 2006).

حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل کسری در بسیاری موارد دشوار یا حتی غیرممکن است؛ بنابراین، روش‌های عددی در تحلیل و شبیه‌سازی این معادلات جایگاه ویژه‌یی یافته‌اند (Diethelm, 2010). در این میان، روش عددی پیش‌بینی-تصحیح‌کننده به علت تعادل مناسب میان دقت و پیچیدگی محاسباتی، از محبوب‌ترین روش‌های عددی برای حل معادلات کسری می‌باشند (Deng, 2007). این روش‌ها معمولاً مبتنی بر فرمول‌ها و تقریب‌های گسسته مشتق کسری بوده و توانسته‌اند در حل معادلات دیفرانسیل کسری خطی و غیرخطی موفقیت‌های چشمگیری کسب کنند (Diethelm et al., 2002).

دقت و پایداری روش‌های عددی در حل معادلات دیفرانسیل کسری اهمیت فراوانی دارد؛ زیرا خطاهای عددی ممکن است به سرعت افزایش یافته و نتایج نهایی را غیرقابل اعتماد سازند (Li & Zeng, 2015). بنابراین، بررسی روش پیش‌بینی-تصحیح‌کننده و تحلیل خطاهای ناشی از گسسته‌سازی، موضوعی حیاتی برای توسعه و بهبود الگوریتم‌های عددی به شمار می‌رود (Zeng et al., 2018). همچنین، تغییراتی در فرمول‌های پیش‌بینی و تصحیح‌کننده به منظور حفظ دقت و افزایش کارایی محاسباتی اعمال شده است (Garrappa, 2010).

معادلات دیفرانسیل خطی کسری، به علت ساختار ریاضی ساده‌تر نسبت به معادلات غیرخطی، به عنوان مدل‌های اساسی برای ارزیابی روش‌های عددی استفاده می‌شوند (Podlubny, 1999). در این معادلات، مشتق کسری کاپوتو نقش مهمی در نمایش اثرات حافظه طولانی‌مدت بر رفتار سیستم‌ها ایفا می‌کند (Mainardi, 2010). از این رو، بررسی دقیق عملکرد روش پیش‌بینی-تصحیح‌کننده بر معادلات

<sup>۱</sup> Caputo fractional derivative

دیفرانسیل خطی کسری نوع کاپوتو، زمینه مناسب برای بهبود روش‌های عددی و توسعه کاربردهای عملی آن‌ها است (Li et al., 2019).

در تحقیقات اخیر، تلاش شده با به‌کارگیری تکنیک‌های مختلف ریاضی و محاسباتی، دقت روش‌های عددی افزایش یافته و پارامترهای عددی بهینه شوند (Zayernouri & Karniadakis, 2013; Sousa, 2016). همچنین، روش‌های مبتنی بر شبکه‌های عصبی و یادگیری ماشین به عنوان مکمل برای پیش‌بینی دقیق‌تر پاسخ معادلات کسری به کار رفته‌اند (Liu et al., 2021). با این وجود، روش پیش‌بینی-تصحیح‌کننده همچنان به عنوان روش کلاسیک و قابل اعتماد در این حوزه شناخته می‌شوند (Diethelm & Freed, 1999).

هدف اصلی این مقاله، بررسی دقیق دقت روش پیش‌بینی-تصحیح‌کننده در حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه کسری نوع کاپوتو است. با تحلیل خطاها، ارزیابی پایداری روش و مقایسه با روش‌های مشابه، تلاش می‌شود تا درک بهتری از مزایا و محدودیت‌های این روش به دست آید. این مطالعه می‌تواند به گسترش کاربرد معادلات کسری در انجینری، فزیک و علوم تطبیقی کمک کند.

در نهایت، این تحقیق می‌تواند به توسعه الگوریتم‌های سریع‌تر، دقیق‌تر و پایدارتر در حل معادلات دیفرانسیل کسری کمک نموده و پایه‌ای برای مطالعات آینده در این حوزه باشد. با توجه به اهمیت روزافزون معادلات کسری در مدل‌سازی پروسه‌های واقعی، ارزیابی دقیق روش‌های عددی نقش کلیدی در پیشرفت این دانش ایفا می‌کند.

## تعریف مفاهیم

### تابع گاما

تابع  $\Gamma(x) \rightarrow x$ ، تعریف شده توسط  $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$  تابع گاما نامیده می‌شود.

**خواص تابع گاما.** مهم‌ترین خصوصیات تابع گاما طور زیر ارایه گردیده:

- $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ ,  $x > 0$
- $\Gamma(n+1) = n!$ ,  $n \in \mathbb{N}$
- $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$ ,  $x < 0$ ,  $x \notin \mathbb{Z}$
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

### تابع میتاگ-لفلر

تابع میتاگ-لفلر یک تابع خاص است که به نام یک ریاضیدان سوئدنی که آن را در سال ۱۹۰۳ تعریف و مطالعه کرد، نامگذاری شده است (Kimeu, 2009). این یک تعمیم مستقیم از تابع نمایی  $e^x$  است. این تابع در تیوری معادلات دیفرانسیل کسری مهم است. تابع میتاگ-لفلر بر حسب یک سلسله طاق به صورت زیر ارایه گردیده اند.

$$E_{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad \alpha > 0$$

$$E_{\alpha, \beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad \alpha > 0, \beta > 0$$

روابطه بالا به ترتیب تابع یک پارامتری و دو پارامتری از نوع میتاگ-لفلر<sup>۲</sup> نامیده می شوند.

### مشتق کسری کاپوتو

اگر  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع متمادی باشد. مشتق کسری کاپوتو از مرتبه  $\alpha$  یک تابع  $f(x)$  عبارت اند از:

$$D^{\alpha} f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, & n-1 \leq \alpha < n \\ \frac{d^n}{dx^n} f(x) & \alpha = n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(Ishteva, 2005)

خواص مشتق کسری کاپوتو. مهم ترین خواص مشتق کسری کاپوتو قرار ذیل است:

1.  $D^{\alpha} f(x) = D^{-(n-\alpha)}[D^n f(x)]$
2.  $D^{\alpha}(\lambda f(x) + g(x)) = \lambda D^{\alpha} f(x) + D^{\alpha} g(x)$
3.  $\lim_{\alpha \rightarrow n-1} D^{\alpha} f(x) = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)$  و  $\lim_{\alpha \rightarrow n} D^{\alpha} f(x) = f^{(n)}(x)$
4.  $D^{\alpha} D^m f(x) = D^{\alpha+m} f(x) \neq D^m D^{\alpha} f(x)$

### تبدیل لاپلاس

تبدیل لاپلاس تابع  $y(t)$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} y(t) dt,$$

<sup>۲</sup>Mittag-Leffler

همچنین  $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$  یکتا و معکوس ترانسفورم لاپلاس  $Y(s)$  است. تبدیل لاپلاس یک اوبراتور خطی است. به طور خاص، اگر  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  و  $\mathcal{L}\{g(t)\}$  وجود داشته باشند در این صورت:

$$1) \mathcal{L}\{f(t) + g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} + \mathcal{L}\{g(t)\}$$

$$2) \mathcal{L}\{cf(t)\} = c\mathcal{L}\{f(t)\}$$

همچنین برای هر  $\mu > -1, a \in \mathbb{R}$ :

$$3) \mathcal{L}\{t^\mu\} = \frac{\Gamma(\mu + 1)}{s^{\mu+1}}$$

$$4) \mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s - a}$$

یکی از مفیدترین خصوصیات تبدیل لاپلاس در قضیه کانولوشن یافت می‌شود. این قضیه بیان می‌کند که تبدیل لاپلاس از کانولوشن دو تابع حاصل تبدیل لاپلاس آن‌ها است. بنابراین، اگر  $F(s)$  و  $G(s)$  به ترتیب تبدیل لاپلاس توابع  $f(t)$  و  $g(t)$  باشد، آنگاه:

$$f * g = F(s)G(s)$$

$$f * g = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t-u)g(u)du\right\}$$

### تبدیل لاپلاس مشتق کسری

به یاد داریم که در عملیات مرتبه تام، تبدیل لاپلاس  $y^{(n)}$  توسط

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y^{(n)}\} &= s^n Y(s) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \dots - y^{(n-1)}(0) \\ &= s^n Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} y^{(k)}(0) \end{aligned}$$

بیان می‌شود. همچنین می‌دانیم که مشتق کسری مرتبه  $\alpha$  تابع  $y(t)$  عبارت است از

$$D^\alpha y(t) = D^n [D^{-u} y(t)]$$

در حالی که  $n$  کوچکترین عدد تام بزرگتر از صفر و  $\alpha > 0$  و  $u = n - \alpha$  است. می‌توانیم بنویسیم

$$D^\alpha y(t) = D^n [D^{-(n-\alpha)} y(t)]$$

حال، فرض کنیم که تبدیل لاپلاس وجود دارد، بنابر این:

$$\mathcal{L}\{D^\alpha y(t)\} = s^\alpha Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} D^{k-n+\alpha} y(0)$$

به طور خاص، اگر  $n = 1$  و  $n = 2$  باشد، پس به ترتیب داریم

$$\mathcal{L}\{D^\alpha y(t)\} = s^\alpha Y(s) - D^{-(1-\alpha)} y(0), \quad 0 < \alpha \leq 1$$

$$\mathcal{L}\{D^\alpha y(t)\} = s^\alpha Y(s) - sD^{-(2-\alpha)}y(0) - D^{-(1-\alpha)}y(0), \quad 1 < \alpha \leq 2$$

### تبدیل لاپلاس مشتق کسری کاپوتو

تبدیل لاپلاس مشتق کسری کاپوتو عبارت است از:

$$\mathcal{L}\{D_*^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0)$$

### روش تحقیق

این مطالعه از نوع کمی و مبتنی بر روش عددی است. دیتاها از طریق حل معادله دیفرانسیل خطی مرتبه کسری از نوع کاپوتو با استفاده از حل دقیق محاسبه شده و با نرم افزار Octave تولید شده‌اند. واحد تحلیل این تحقیق شامل حل تحلیلی معادله با استفاده از تبدیل لاپلاس و حل عددی آن با روش پیش‌بینی-تصحیح‌کننده می‌باشد. برای گردآوری دیتاها، حل عددی معادله با اندازه گام‌های مختلف محاسبه شده و با نتایج حل تحلیلی مقایسه گردیده است تا دقت روش عددی ارزیابی شود.

روش نمونه‌گیری به صورت هدفمند و مبتنی بر انتخاب معادلات متجانس و غیرمتجانس از نوع کاپوتو انجام شده است. برای تحلیل پایداری روش عددی پیش‌بینی-تصحیح‌کننده، معادلات مختلفی انتخاب گردیده‌اند تا ویژگی‌های دقیق‌تری از عملکرد روش در حل معادلات دیفرانسیل کسری استخراج گردد. در این راستا، مقایسه‌ی میان نتایج عددی حاصل از این روش و نتایج دقیق تحلیلی صورت گرفته است تا میزان دقت روش در حل معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری کاپوتو تحلیل شود.

در این تحقیق ابتدا معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه کسری از نوع کاپوتو با توجه به ویژگی‌های خاص آن‌ها انتخاب شده‌اند. سپس برای حل عددی این معادلات از روش پیش‌بینی-تصحیح‌کننده استفاده شده است که به‌ویژه در موارد پیچیده‌تر از دقت بالاتری برخوردار است. انتخاب اندازه گام‌های مختلف در این روش کمک می‌کند تا دقت نتایج عددی بررسی و بهینه‌سازی شود.

همچنین، در این مطالعه به تحلیل پایداری و دقت روش‌های عددی پرداخته شده است. از آنجایی که روش‌های عددی معمولاً تحت تأثیر اندازه گام‌ها و انتخاب پارامترهای مختلف قرار دارند، تحلیل‌های گسترده‌ای در زمینه پایداری و خطاهای مربوط به این روش‌ها انجام شده است. برای این منظور، معادلات دیفرانسیل کاپوتو با رفتارهای مختلف به‌عنوان نمونه‌های مختلف برای بررسی پایداری انتخاب شده‌اند.

## یافته‌ها

یافته‌های این تحقیق نشان می‌دهند که روش عددی پیش‌بینی-تصحیح‌کننده عملکرد قابل اطمینانی در حل معادلات دیفرانسیل خطی با مشتق کسری نوع کاپوتو دارد. نتایج حاصل از به‌کارگیری این روش در مجموعه‌ای از مثال‌های عددی، اعم از معادلات متجانس و غیرمتجانس، بیانگر آن است که تقریب‌های عددی به‌دست‌آمده تطابق بسیار خوبی با پاسخ‌های تحلیلی دارند. مقایسه‌ی خطاها در جدول‌ها و نمودارهای ارائه‌شده نشان می‌دهد که خطای روش در گام‌های زمانی کوچک به‌طور محسوسی کاهش می‌یابد و روند تقارب مناسبی را دنبال می‌کند. همچنین مشاهده شد که روش به‌ویژه در مسائلی با شرایط اولیه‌ی کلاسیک از پایداری عددی مطلوبی برخوردار است. به‌طور کلی، نتایج حاصل تأیید می‌کنند که روش پیش‌بینی-تصحیح‌کننده می‌تواند به‌عنوان روشی دقیق و کارآمد برای حل عددی معادلات دیفرانسیل کسری مبتنی بر مشتق کاپوتو مورد استفاده قرار گیرد.

## معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری خطی

تعریف. یک معادله دیفرانسیل کسری متجانس خطی با ضرایب ثابت معادله‌ی به شکل ذیل می‌باشد:

$$D^{\alpha_m} y(t) + b_1 D^{\alpha_{m-1}} y(t) + b_2 D^{\alpha_{m-2}} y(t) + \dots + b_m D^{\alpha_0} y(t) = 0,$$

است طوری که  $\alpha_i$  اعداد حقیقی با  $\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{m-1} < \alpha_m$  و  $b_i$ ها ثابت هستند (Kilbas, 2006).

## مقایسه پاسخ عددی و تحلیلی در حل معادلات دیفرانسیل کسری

در بررسی دقت روش‌های عددی، مقایسه بین پاسخ عددی و تحلیلی (در صورت موجود بودن) یکی از مهم‌ترین ابزارهای ارزیابی است. برای معادلات دیفرانسیل کسری نوع کاپوتو، در برخی موارد خاص، می‌توان پاسخ دقیق (تحلیلی) را به‌صورت بسته (closed-form) با استفاده از تبدیل لاپلاس یا توابع خاص (مانند تابع میتاگ-فلر) به‌دست آورد.

مقایسه بین پاسخ عددی به‌دست‌آمده از روش پیش‌بینی-تصحیح‌کننده و پاسخ تحلیلی، معمولاً در قالب جدول و یا گراف‌های تطبیقی انجام می‌شود. معیارهایی؛ مانند خطای نسبی، خطای مطلق و گراف تفاضل پاسخ عددی و تحلیلی برای این مقایسه استفاده می‌شوند.

هر چه پاسخ عددی به پاسخ تحلیلی نزدیک‌تر باشد، نشان‌دهنده دقت و صحت روش عددی است. این مقایسه همچنین به انتخاب مناسب گام زمانی و ارزیابی پایداری کمک می‌کند.

### حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه کسری به کمک تبدیل لاپلاس

تبدیل لاپلاس برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری خطی یکی از روش‌های تحلیلی مؤثر است. بنابراین، می‌توانیم در حل معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری از تبدیل لاپلاس استفاده کنیم. در این روش معادله را به فرم معیاری آن می‌نویسیم و در هر دو طرف معادله تبدیل لاپلاس را اعمال و بعد از تطبیق شرایط اولیه رابطه به دست آمده را از جنس  $Y(s)$  حل می‌کنیم و با استفاده از جدول معکوس  $Y(s)$  را دریافت نموده که در نتیجه حل معادله به دست می‌آید. در بسیاری از موارد ممکن است جواب نهایی از جنس تابع خاص میتاگ-لفلر ارائه گردد. این تبدیل یکی از ابزارهای مهم در تحلیل سیستم‌های دینامیکی می‌باشد که با تبدیل مشتقات کسری به روابط الجبری عملیات حل معادله را تسهیل می‌سازد. ویژه‌گی مهم تبدیل لاپلاس برای مشتق کاپوتو از مرتبه الفا به شکل زیر است:

$$\mathcal{L}\{D^\alpha y(t)\} = s^\alpha Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} y^{(k)}(0)$$

حال با در نظر داشت تعریف فوق به حل معادله دیفرانسیل خطی مرتبه کسری که شکل عمومی طور ذیل است می‌پردازیم:

$$D^{\alpha_m} y(t) + b_1 D^{\alpha_{m-1}} y(t) + b_2 D^{\alpha_{m-2}} y(t) + \dots + b_m D^{\alpha_0} y(t) = h(t)$$

تبدیل لاپلاس را به هر دو طرف معادله اعمال می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{D^{\alpha_m} y(t) + b_1 D^{\alpha_{m-1}} y(t) + b_2 D^{\alpha_{m-2}} y(t) + \dots + b_m D^{\alpha_0} y(t)\} \\ = \mathcal{L}\{h(t)\} \\ \mathcal{L}\{D^{\alpha_m} y(t)\} + b_1 \mathcal{L}\{D^{\alpha_{m-1}} y(t)\} + b_2 \mathcal{L}\{D^{\alpha_{m-2}} y(t)\} + \dots \\ + b_m \mathcal{L}\{D^{\alpha_0} y(t)\} = \mathcal{L}\{h(t)\} \end{aligned}$$

در نتیجه با اعمال تبدیل لاپلاس به دست می‌آوریم که:

$$(s^{\alpha_m} + b_1 s^{\alpha_{m-1}} + b_2 s^{\alpha_{m-2}} + \dots + b_m s^{\alpha_0}) Y(s) = F(s)$$

$$Y(s) = \frac{s^{\alpha_m} + b_1 s^{\alpha_{m-1}} + b_2 s^{\alpha_{m-2}} + \dots + b_m s^{\alpha_0}}{F(s)}$$

از این جا با اعمال لاپلاس معکوس به هر دو طرف رابطه اخیر داریم که:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha_m} + b_1 s^{\alpha_{m-1}} + b_2 s^{\alpha_{m-2}} + \dots + b_m s^{\alpha_0}}{F(s)}\right\} \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha_m} + b_1 s^{\alpha_{m-1}} + b_2 s^{\alpha_{m-2}} + \dots + b_m s^{\alpha_0}}{F(s)}\right\} \end{aligned}$$

در نتیجه مراجعه به جدول تبدیل معکوس لاپلاس حل تحلیلی معادله به دست می‌آید.



اگر به طور خاص معادله خطی دیفرانسیل مرتبه کسری  $D^\alpha y(t) + by(t) = f(t)$  را که دارای مشتق کسری کاپوتو بوده و دارای شرط اولیه  $y(0) = y_0$  است با کمک تبدیل لاپلاس حل کنیم می‌توانیم بنویسیم که:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{D^\alpha y(t)\} + b\mathcal{L}\{y(t)\} &= \mathcal{L}\{f(t)\} \\ s^\alpha Y(s) - s^{\alpha-1}y(0) + bY(s) &= F(s) \\ s^\alpha Y(s) + bY(s) &= F(s) + s^{\alpha-1}\end{aligned}$$

با حل نمودن رابطه فوق نسبت به  $Y(s)$  به دست می‌آوریم که:

$$Y(s) = \frac{F(s) + s^{\alpha-1}}{s^\alpha + b}$$

از این جا با اعمال تبدیل لاپلاس معکوس حل معادله به شکل زیر خواهد بود:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s^\alpha + b} + \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + b}\right\}$$

### تقریب عددی انتگرال ولترا

انتگرال ولترا نوعی انتگرال خطی با سرحد بالا متحول است که به صورت کلی زیر تعریف می‌شود:

$$I(t) = \int_0^t K(t, \tau) f(\tau) d\tau$$

که در آن  $K(t, \tau)$  یک کرنل (تابع هسته) و  $f(\tau)$  تابع معلوم است. این نوع انتگرال‌ها در معادلات دیفرانسیل با مشتق کسری، به ویژه در فرم انتگرالی معادلات با مشتق نوع کاپوتو، نقش کلیدی دارند؛ زیرا مشتقات کسری اغلب از طریق انتگرال‌های نوع ولترا بازنویسی می‌شوند.

برای حل عددی این انتگرال‌ها، از روش‌هایی؛ مانند قاعده دوزنقه‌یی، قاعده مستطیلی، یا فرمول‌های خاص بر پایه توسعه تیلور یا تابع پایه استفاده می‌شود. در روش پیش‌بینی-تصحیح‌کننده نیز تقریب عددی انتگرال ولترا با استفاده از ضرایب خاصی انجام می‌شود که مبتنی بر تابع گاما و توان‌های اعشاری از فاصله زمانی  $h$  هستند.

تقریب عددی دقیق این نوع انتگرال‌ها، نقش تعیین‌کننده‌یی در دقت کلی حل عددی معادلات دیفرانسیل کسری دارد؛ زیرا کوچک‌ترین خطا در این مرحله می‌تواند به صورت تجمعی در کل انتروال زمانی گسترش یابد. در معادلات دیفرانسیل کسری نوع کاپوتو، فرم انتگرالی معادله با استفاده از انتگرال ولترا بازنویسی می‌شود.

## تبدیل معادله دیفرانسیل کسری به فرم انتگرالی

برای معادله دیفرانسیل نوع کاپوتو از مرتبه  $\alpha \in (0,1)$

$$D_t^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \quad y(0) = y_0$$

فرم انتگرالی آن به صورت زیر است:

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau$$

که دقیقاً یک انتگرال ولترا با کرنل  $K(t, \tau) = (t - \tau)^{\alpha-1}$  است.

در عمل محاسبه تحلیلی انتگرال فوق در بسیاری موارد کار بسیار دشوار است اما می توان با روش های عددی انتگرال فوق را محاسبه نمود از جمله روش های عددی روش پیش بینی-تصحیح کننده از روش های موثر برای حل آن است.

## الگوریتم<sup>۳</sup>

یکی از روش های مؤثر عددی که برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری نوع کاپوتو پیشنهاد شده است. روش پیش بینی-تصحیح کننده است که به دلیل پایداری، دقت مناسب و سادگی اجرا مورد استفاده قرار می گیرد.

معادله دیفرانسیل مرتبه کسری نوع کاپوتو به صورت زیر تعریف می شود:

$$D_t^\alpha y(t) = f(t, y(t)) \quad y(0) = y_0 \quad 0 < \alpha < 1$$

برای حل معادله فوق با استفاده از میتود پیش بینی-تصحیح کننده، ابتدا معادله آن را به معادله انتگرالی معادل تبدیل می کنیم. با استفاده از رابطه بین مشتق کسری کاپوتو و انتگرال کسری ریمان-لیوویل شکل انتگرالی معادله به صورت زیر در می آید.

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau$$

رابطه فوق معادله ولترا از نوع اول است که محاسبه تحلیلی آن بعضاً بسیار دشوار و حتی ناممکن است.

## ساختار الگوریتم پیش بینی-تصحیح کننده

الگوریتم پیش بینی-تصحیح کننده به دو گام اصلی تقسیم می شود:

<sup>۳</sup> Predictor-Corrector

۱. گام پیش‌بینی<sup>۴</sup>

۲. گام تصحیح‌کننده<sup>۵</sup>

که با در نظر داشت گام زمان  $h$  که به شکل  $t_j = jh$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$  تعریف می‌شود گام‌های پیش‌بینی و تصحیح‌کننده طور زیر بیان می‌شوند:

گام پیش‌بینی

$$y_{n+1}^p = y_0 + \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f(t_j, y_j)$$

که

$$b_{j,n+1} = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} [(n+1-j)^\alpha - (n-j)^\alpha]$$

گام تصحیح‌کننده

$$y_{n+1} = y_0 + \sum_{j=0}^n a_{j,n+1} f(t_j, y_j) + a_{n+1,n+1} f(t_{n+1}, y_{n+1}^p)$$

که

$$a_{j,n+1} = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \times A_{j,n+1}$$

در حالی که ضرایب  $A_{j,n+1}$  به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$A_{j,n+1} = \begin{cases} n^{\alpha+1} - (n-\alpha)(n+1)^\alpha, & j = 0 \\ (n-j+2)^{\alpha+1} + (n-j)^{\alpha+1} - 2(n-j+1)^{\alpha+1}, & 1 \leq j \leq n \\ 1, & j = n+1 \end{cases}$$

پایداری روش پیش‌بینی-تصحیح‌کننده

پایداری عددی یکی از مهم‌ترین معیارها برای ارزیابی روش‌های حل عددی معادلات دیفرانسیل است. در مورد معادلات دیفرانسیل کسری، به دلیل حضور حافظه در سیستم، بررسی پایداری به مراتب پیچیده‌تر از معادلات کلاسیک مرتبه تام است.

<sup>۴</sup> Predictor

<sup>۵</sup> corrector

روش پیش‌بینی-تصحیح‌کننده برای معادلات کسری نوع کاپوتو، تحت شرایط خاصی پایدار است. مطالعات عددی و نظری نشان می‌دهند که پایداری این روش به نوع معادله، مقدار مرتبه مشتق کسری  $\alpha$  و هم‌چنین گام زمانی  $h$  بستگی دارد. اگر  $h$  بیش از حد بزرگ انتخاب شود، ممکن است نوسانات یا تباعد در پاسخ عددی مشاهده شود. پایداری روش هم‌چنین به نحوه محاسبه ضرایب تصحیح‌کننده (Corrector Coefficients) و نحوه تقریب انتگرال ولترا وابسته است. در عمل، این روش زمانی پایدار و دقیق است که گام زمانی کوچک و مناسب انتخاب شود و نیز معادله مورد نظر دارای رفتار ملایم باشد.

### تأثیر گام زمانی $h$ بر دقت روش عددی پیش‌بینی-تصحیح‌کننده

یکی از عوامل اصلی در دقت روش‌های عددی، اندازه گام زمانی  $h$  است. در روش پیش‌بینی-تصحیح‌کننده برای معادلات دیفرانسیل کسری، کاهش گام زمانی معمولاً موجب افزایش دقت می‌شود (Zabidi et al., 2022). زیرا انتگرال‌های کسری که در هر مرحله محاسبه می‌شوند، با تقریب بهتر انجام می‌گیرند.

با این حال، کاهش گام زمانی هزینه محاسباتی را افزایش می‌دهد؛ زیرا در مشتقات کسری، تمام مقادیر قبلی در محاسبه مقدار کنونی نقش دارند (ویژگی حافظه‌دار بودن). بنابراین، با کاهش  $h$ ، حجم حافظه و تعداد محاسبات نیز به صورت چشمگیری افزایش می‌یابد.

تحلیل عددی خطا نشان می‌دهد که برای مرتبه کسری  $\alpha$ ، خطای روش پیش‌بینی-تصحیح‌کننده از مرتبه  $O(h^{2-\alpha})$  است. بنابراین، برای رسیدن به دقت بالا، لازم است که گام زمانی به اندازه کافی کوچک باشد. در کاربردهای واقعی، انتخاب گام زمانی مناسب یک تعادل بین دقت مطلوب و هزینه محاسباتی است. جهت بررسی این موضوع مسایل توضیحی ذیل ارائه شده‌اند.

### مسایل توضیحی

مثال ۱. حل تحلیلی معادله دیفرانسیل کسری  $D_t^{\frac{3}{4}}y(t) = t^2 + 3t - 1$  با شرط اولیه  $y(0) = 1$  را به کمک تبدیل لاپلاس و حل عددی آنرا با روش پیش‌بینی-تصحیح‌کننده دریابید.

حل:

$$D_t^{\frac{3}{4}}y(t) = t^2 + 3t - 1 \quad y(0) = 1 \quad \alpha \in (0,1)$$

تبدیل لاپلاس هرحد معادله را دریافت می‌کنیم:

$$\mathcal{L}\left\{D_t^{\frac{3}{4}}y(t)\right\} = \mathcal{L}\{t^2\} + \mathcal{L}\{3t\} - \mathcal{L}\{1\}$$

با استفاده از  $\mathcal{L}\{D_t^\alpha y(t)\} = s^\alpha Y(s) - s^{\alpha-1}Y(s)$

$$s^{\frac{3}{4}}Y(s) - s^{\frac{3}{4}-1}y(0) = \frac{2}{s^3} + \frac{3}{s^2} - \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{2}{s^{\frac{15}{4}}} + \frac{3}{s^{\frac{11}{4}}} - \frac{1}{s^{\frac{7}{4}}} + \frac{1}{s}$$

حال معکوس تبدیل لاپلاس  $Y(s)$  را به دست می‌آوریم:

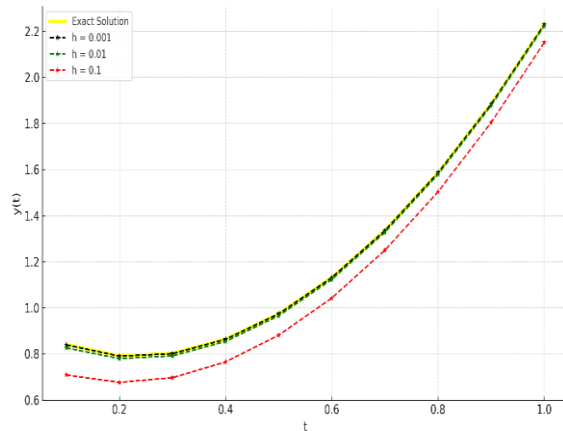
$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^{\frac{15}{4}}} + \frac{3}{s^{\frac{11}{4}}} - \frac{1}{s^{\frac{7}{4}}} + \frac{1}{s}\right\}$$

بنا بر این حل معادله‌ی زیر به دست می‌آید:

$$y(t) = 1 + \frac{2}{\Gamma(3.75)}t^{2.75} + \frac{3}{\Gamma(2.75)}t^{1.75} - \frac{1}{\Gamma(1.75)}t^{0.75}$$

جدول ۱: حل معادله  $D_t^{\frac{3}{4}}y(t) = t^2 + 3t - 1$ ،  $y(0) = 1$  با گام‌های مختلف  $h$

| t   | Exact        | h=0.1        | h=0.01       | h =0.001     |
|-----|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 0.1 | 0.8404851448 | 0.7088676789 | 0.8261509371 | 0.8390358204 |
| 0.2 | 0.7915702150 | 0.6764403115 | 0.7794475434 | 0.7903507524 |
| 0.3 | 0.8022684622 | 0.6967722501 | 0.7912946369 | 0.8011663490 |
| 0.4 | 0.8643912915 | 0.7655820661 | 0.8541708386 | 0.8633655758 |
| 0.5 | 0.9747934752 | 0.8810489767 | 0.9651237684 | 0.9738233742 |
| 0.6 | 1.1321696577 | 1.0424719903 | 1.1229290594 | 1.1312427636 |
| 0.7 | 1.3361001885 | 1.2497556861 | 1.3272082866 | 1.3352083286 |
| 0.8 | 1.5866597060 | 1.5031677790 | 1.5780597525 | 1.5857971274 |
| 0.9 | 1.8842255248 | 1.8032093376 | 1.8758755318 | 1.8833879793 |
| 1.0 | 2.2293724277 | 2.1505389419 | 2.2212401922 | ۲.2285566620 |



شکل ۱: حل تحلیلی و حل عددی با گام‌های مختلف  $h$

مثال ۲. حل تحلیلی معادله دیفرانسیل  $D_t^{3/5} y(t) + y(t) = 0$  با شرط اولیه  $y(0) = 1$  به کمک تبدیل لاپلاس و حل عددی آنرا با کمک روش پیش‌بینی-تصحیح‌کننده دریابید.

حل:

$$D_t^{3/5} y(t) + y(t) = 0, y(0) = 1$$

$$\mathcal{L}\{D_t^{3/5} y(t) + y(t)\} = 0$$

$$s^{3/5} Y(s) - s^{-2/5}(1) + Y(s) = 0$$

$$Y(s) = \frac{s^{-2/5}}{s^{3/5} + 1}$$

با استفاده از تبدیل معکوس لاپلاس به دست می‌آوریم که:

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{-2/5}}{s^{3/5} + 1}\right\}$$

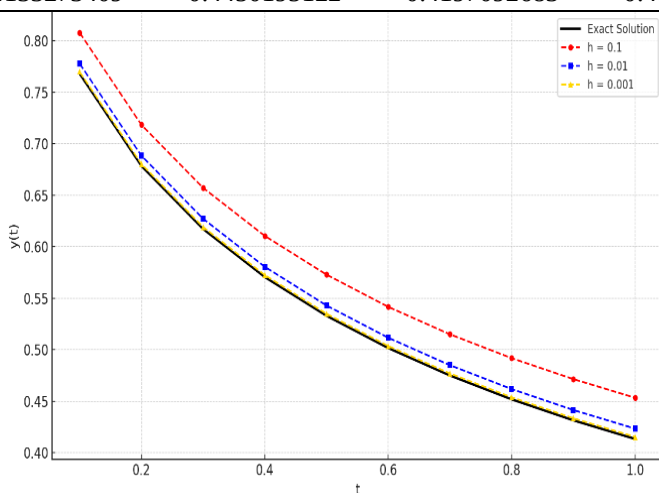
$$y(t) = t^0 E_{\frac{3}{2}, 1}\left(-t^{\frac{3}{2}}\right)$$

بنابراین، حل معادله با کمک تبدیل لاپلاس عبارت است از:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{\frac{3}{2}k}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}k + 1\right)}$$

جدول ۲: حل معادله  $D_t^{3/5} y(t) + y(t) = 0$ ،  $y(0) = 1$  با گام‌های مختلف  $h$

| t   | Exact        | h=0.1        | h=0.01       | h =0.001     |
|-----|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 0.1 | 0.7678739755 | 0.8045152458 | 0.7877864513 | 0.7738546169 |
| 0.2 | 0.6784501641 | 0.7282761246 | 0.6959795154 | 0.6832188327 |
| 0.3 | 0.6172164060 | 0.6689911473 | 0.6323033897 | 0.6211437222 |
| 0.4 | 0.5705245733 | 0.6205521958 | 0.5835795054 | 0.5738329984 |
| 0.5 | 0.5329336827 | 0.5799701444 | 0.5443246914 | 0.5357666259 |
| 0.6 | 0.5016288628 | 0.5453330285 | 0.5116475045 | 0.5040850023 |
| 0.7 | 0.4749400008 | 0.5153357092 | 0.4838141959 | 0.4770905461 |
| 0.8 | 0.4517867114 | 0.4890475258 | 0.4596960457 | 0.4536849109 |
| 0.9 | 0.4314268220 | 0.4657821282 | 0.4385145672 | 0.4331136058 |
| 1.0 | 0.4133273409 | 0.4450195122 | 0.4197092683 | 0.4148348710 |



شکل ۲: حل تحلیلی و حل عددی با گام‌های مختلف  $h$

مثال ۳. حل تحلیلی معادله دیفرانسیل  $D_t^{9/10}y(t) + \frac{2}{3}y(t) = t^2$  با شرط اولیه  $y(0) = 1$  به کمک تبدیل لاپلاس و حل عددی آن را با کمک روش پیش‌بینی-تصحیح‌کننده در یابید.

حل:

$$D_t^{9/10}y(t) + \frac{2}{3}y(t) = t^2, y(0) = 1$$

$$\mathcal{L}\left\{D_t^{9/10}y(t) + \frac{2}{3}y(t)\right\} = \mathcal{L}\{t^2\}$$

$$s^{9/10}Y(s) - s^{-1/10}(1) + \frac{2}{3}Y(s) = \frac{2}{s^3}$$

$$Y(s) = \frac{2s^{-3}}{s^{9/10} + \frac{2}{3}} + \frac{s^{-1/10}}{s^{9/10} + \frac{2}{3}}$$

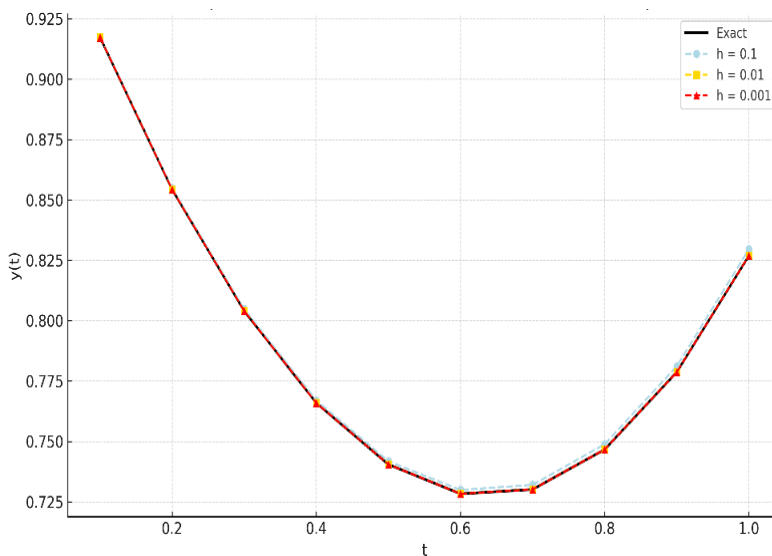
با استفاده از تبدیل معکوس لاپلاس بدست می آوریم که:

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^{-3}}{\frac{9}{s^{10}} + \frac{2}{3}} + \frac{s^{-\frac{1}{10}}}{\frac{9}{s^{10}} + \frac{2}{3}}\right\}$$

$$y(t) = E_{\frac{9}{10},1}\left(-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right) + \int_0^t (t-\tau)^{-0.1} E_{\frac{9}{10},\frac{9}{10}}\left(-\frac{2}{3}(t-\tau)^{0.9}\right) \tau^2 d\tau$$

جدول ۳: حل معادله  $y(0) = 1$ ،  $D_t^{9/10}y(t) + \frac{2}{3}y(t) = t^2$  با گام های مختلف  $h$

| T   | Exact        | h=0.1        | h=0.01       | h=0.001       |
|-----|--------------|--------------|--------------|---------------|
| 0.1 | 0.9172621554 | 0.9174320497 | 0.9172626269 | 0.9172621454  |
| 0.2 | 0.8542986273 | 0.8547638501 | 0.8543026088 | 0.8542986607  |
| 0.3 | 0.8039927148 | 0.8047495890 | 0.8040001372 | 0.8039927902  |
| 0.4 | 0.7659243607 | 0.7669699936 | 0.7659351896 | 0.7659244778  |
| 0.5 | 0.7404857176 | 0.7418176328 | 0.7404999319 | 0.74048587761 |
| 0.6 | 0.7283157564 | 0.7299315151 | 0.7283333379 | 0.7283159564  |
| 0.7 | 0.7301351276 | 0.7320321111 | 0.7301560562 | 0.7301353689  |
| 0.8 | 0.7466821856 | 0.7488574922 | 0.7467064372 | 0.7466824681  |
| 0.9 | 0.7786848255 | 0.7811350330 | 0.7787121714 | 0.7786849489  |
| 1.0 | 0.8268461616 | 0.8295681260 | 0.8268769681 | 0.8268465256  |



شکل ۳: حل تحلیلی و حل عددی با گام های مختلف  $h$



**مثال ۴.** حل تحلیلی معادله دیفرانسیل  $D_t^{0.8}y(t) + y(t) = Cost$  با شرط اولیه  $y(0) = 1$  به کمک تبدیل لاپلاس و حل عددی آنرا با کمک روش پیش‌بینی-تصحیح‌کننده دریابید.

حل:

$$D_t^{0.8}y(t) + y(t) = Cost \quad y(0) = 1$$

$$\mathcal{L}\{D_t^{0.8}y(t) + y(t)\} = \mathcal{L}\{Cost\}$$

$$s^{0.8}Y(s) - s^{-0.2}(1) + Y(s) = \frac{s}{s^2 + 1}$$

$$Y(s) = \frac{s^{-\frac{1}{10}}}{s^{0.8} + 1}$$

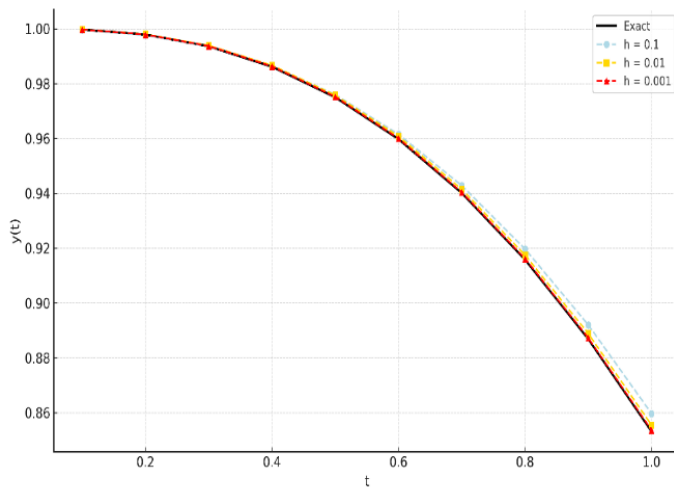
با استفاده از تبدیل معکوس لاپلاس بدست می‌آوریم که

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{-\frac{1}{10}}}{s^{0.8} + 1}\right\}$$

$$y(t) = E_{0.8}(-t^{0.8}) + \int_0^t (t - \tau)^{-0.2} E_{0.8,0.8}(-(t - \tau)^{0.8}) Cost \tau d\tau$$

جدول ۴: حل معادله  $D_t^{0.8}y(t) + y(t) = Cost$  ،  $y(0) = 1$  با گام‌های مختلف  $h$

| T   | Exact        | h=0.1        | h=0.01       | h =0.001     |
|-----|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 0.1 | 0.9996804631 | 0.9995277120 | 0.9996999375 | 0.9996877888 |
| 0.2 | 0.9978634877 | 0.9976493953 | 0.9979682132 | 0.9978938699 |
| 0.3 | 0.9935930198 | 0.9935241589 | 0.9938480247 | 0.9936598333 |
| 0.4 | 0.9861589729 | 0.9864670499 | 0.9866204979 | 0.9862729352 |
| 0.5 | 0.9750177809 | 0.9759304111 | 0.9757321016 | 0.9751871609 |
| 0.6 | 0.9597590801 | 0.9614862452 | 0.9607625782 | 0.9599899296 |
| 0.7 | 0.9400869555 | 0.9428140870 | 0.9414065493 | 0.9403833185 |
| 0.8 | 0.9158077133 | 0.9196920945 | 0.9174613991 | 0.9161718107 |
| 0.9 | 0.8868210005 | 0.8919900136 | 0.8888184228 | 0.8872533945 |
| 1.0 | 0.8531127402 | 0.8596632230 | 0.8554557649 | 0.8536124838 |



شکل ۴: حل تحلیلی و حل عددی با گام‌های مختلف  $h$

مثال ۵. حل تحلیلی معادله دیفرانسیل  $D_t^{\frac{1}{2}} y(t) = e^t$  با شرط اولیه  $y(0) = 1$  به کمک تبدیل لاپلاس و حل عددی آنرا با کمک روش پیش‌بینی-تصحیح‌کننده دریابید.

حل:

$$D_t^{\frac{1}{2}} y(t) = e^t, y(0) = 1$$

$$\mathcal{L}\{D_t^{\frac{1}{2}} y(t)\} = \mathcal{L}\{e^t\}$$

$$s^{\frac{1}{2}} Y(s) - s^{-\frac{1}{2}}(1) = \frac{1}{s-1}$$

$$Y(s) = \frac{s^{-\frac{1}{2}}}{s-1} + \frac{1}{s}$$

با استفاده از تبدیل معکوس لاپلاس بدست می‌آوریم که:

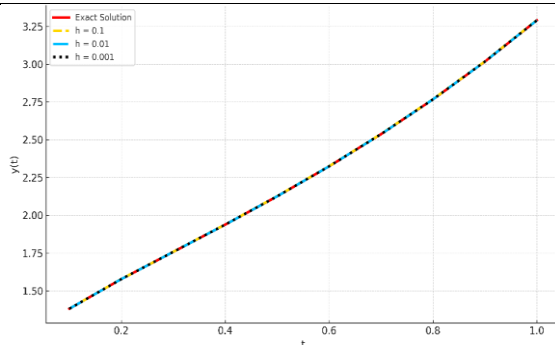
$$\mathcal{L}^{-1} Y(s) = \mathcal{L}^{-1} \frac{s^{-\frac{1}{2}}}{s-1} + \frac{1}{s}$$

$$y(t) = E_{1, \frac{3}{2}}(t) + 1,$$

$$y(t) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k + \frac{3}{2})}$$

جدول ۵: حل معادله  $D_t^{\frac{1}{2}} y(t) = e^t$ ،  $y(0) = 1$  با گام‌های مختلف  $h$

| T   | Exact        | h=0.1        | h=0.01       | h=0.001      |
|-----|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 0.1 | ۱/۳۸۱۵۹۲۴۷۹۶ | ۱/۳۸۱۸۴۳۲۱۹۴ | ۱/۳۸۱۵۹۵۴۴۷۲ | ۱/۳۸۱۵۹۲۵۱۰۷ |
| 0.2 | ۱/۵۷۷۶۱۴۴۸۶۰ | ۱/۵۷۸۰۲۰۴۲۲۴ | ۱/۵۷۷۶۱۹۰۶۴۷ | ۱/۵۷۷۶۱۴۵۳۳۴ |
| 0.3 | ۱/۷۵۷۸۴۰۳۹۶۳ | ۱/۷۵۸۳۸۸۲۳۶۵ | ۱/۷۵۷۸۴۶۴۵۲۰ | ۱/۷۵۷۸۴۰۴۵۸۶ |
| 0.4 | ۱/۹۳۸۲۱۸۴۴۳۹ | ۱/۹۳۸۹۰۷۶۱۶۴ | ۱/۹۳۸۲۲۵۹۷۵۵ | ۱/۹۳۸۲۱۸۵۲۱۱ |
| 0.5 | ۲/۱۲۵۵۶۴۶۸۷۰ | ۲/۱۲۶۴۰۰۱۲۱۵ | ۲/۱۲۵۵۷۳۷۴۹۶ | ۲/۱۲۵۵۶۴۷۷۹۸ |
| 0.6 | ۲/۳۲۴۰۹۴۲۳۱۸ | ۲/۳۲۵۰۸۴۲۴۴۵ | ۲/۳۲۴۱۰۴۹۱۵۵ | ۲/۳۲۴۰۹۴۳۴۱۱ |
| 0.7 | ۲/۵۳۷۰۴۹۹۷۶۲ | ۲/۵۳۸۲۰۵۴۶۵۷ | ۲/۵۳۷۰۶۲۳۹۷۷ | ۲/۵۳۷۰۵۰۱۰۳۰ |
| 0.8 | ۲/۷۶۷۲۹۴۹۰۵۷ | ۲/۷۶۸۶۲۹۰۳۱۴ | ۲/۷۶۷۳۰۹۲۰۵۱ | ۲/۷۶۷۲۹۵۰۵۱۶ |
| 0.9 | ۳/۰۱۷۵۸۱۶۹۹۶ | ۳/۰۱۹۱۰۹۷۷۹۵ | ۳/۰۱۷۵۹۸۰۳۹۸ | ۳/۰۱۷۵۸۱۸۶۶۳ |
| 1.0 | ۳/۲۹۰۶۹۸۲۵۲۳ | ۳/۲۹۲۴۳۷۷۷۹۸ | ۳/۲۹۰۷۱۶۸۱۸۷ | ۳/۲۹۰۶۹۸۴۴۱۵ |



شکل ۵: حل تحلیلی و حل عددی با گام‌های مختلف  $h$

یافته‌های این مقاله نشان می‌دهند که روش عددی پیش‌بینی-تصحیح‌کننده برای حل معادلات دیفرانسیل خطی با مشتق کسری نوع کاپوتو، از دقت و پایداری مناسبی برخوردار است. تحلیل‌های عددی و نظری انجام‌شده بر اساس مسائل توضیحی، بیانگر آن است که دقت این روش با کاهش گام زمانی  $h$  به‌طور قابل توجهی افزایش می‌یابد و خطای آن از مرتبه  $O(h^{2-\alpha})$  می‌باشد. همچنین مشخص شد که پایداری این روش به نوع معادله، مقدار مشتق کسری و اندازه گام زمانی وابسته است؛ به‌گونه‌ای که انتخاب گام زمانی بزرگ می‌تواند باعث ناپایداری و نوسانات در جواب عددی شود. در مسائل عددی بررسی‌شده، روش پیش‌بینی-تصحیح‌کننده توانسته است با انتخاب گام زمانی مناسب و اعمال ضرایب تصحیح دقیق، نتایجی هم‌راستا با جواب تحلیلی ارائه دهد. این نتایج مؤید آن است که این روش عددی، به‌ویژه در شرایطی که معادله رفتار ملایمی دارد و گام زمانی به‌درستی تنظیم شده باشد، می‌تواند به‌عنوان روشی مؤثر و دقیق برای حل معادلات دیفرانسیل کسری با شرایط اولیه کلاسیک به کار گرفته شود.

## بحث و مناقشه

هدف اصلی این تحقیق، ارزیابی دقت و پایداری روش عددی پیش‌بینی-تصحیح‌کننده در حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه کسری نوع کاپوتو بود. نتایج جداول ۱ تا ۵ نشان می‌دهند که با کاهش اندازه گام  $h$ ، خطای عددی به‌طور منظم کاهش یافته است. به‌ویژه، در جدول ۱، زمانی که  $h$  از ۰.۱ به ۰.۰۱ کاهش یافته، اختلاف بین مقدار دقیق و عددی از حدود  $1.3 \times 10^{-1}$  به حدود  $1.4 \times 10^{-2}$  کاهش پیدا کرده است. این روند در جدول ۲ نیز مشاهده می‌شود؛ به‌گونه‌ای که کاهش گام از ۰.۱ به ۰.۰۱ موجب کاهش چشمگیر خطا و تقارب سریع‌تر به جواب تحلیلی شده است. جداول ۳، ۴ و ۵ نیز همین رفتار را برای مثال‌های مختلف تأیید می‌کنند و نشان می‌دهند که روش در حوزه وسیعی از معادلات خطی، عملکردی پایدار و دقیق دارد (Diethelm et al, 2002؛ Li & Zeng, 2012). بررسی شکل‌های ۱ تا ۵ که مقایسه گرافیکی بین پاسخ‌های تحلیلی و عددی را نمایش می‌دهند، روند کاهش خطا با کوچک‌تر شدن  $h$  را به‌وضوح نشان می‌دهد. برای مثال، در شکل ۳، منحنی‌های متناظر با گام‌های کوچک‌تر تقریباً بر روی پاسخ تحلیلی قرار گرفته‌اند که بیانگر دقت بالای روش است. در شکل ۴، نوسانات جزئی در گام بزرگ‌تر  $h=0.1$  دیده می‌شود که با کاهش گام در همان مثال به‌طور کامل از بین رفته است. این مشاهدات با تحلیل‌های نظری (Garrappa (2010 و Zeng et al. (2018 مطابقت دارد مبنی بر اینکه انتخاب مناسب گام زمانی، شرط اصلی دستیابی به پایداری و دقت بالا است.

کاهش خطا با میزان تقارب نظری  $O(h^{2-\alpha})$  مطابقت دارد. برای مثال، جدول ۵ نشان می‌دهد که نسبت خطاها هنگام نصف کردن اندازه گام تقریباً به مقدار ثابت نزدیک است که با پیش‌بینی‌های نظری (Podlubny (1999 و Diethelm (2010 هم‌خوانی دارد. چنین تطابقی میان دیتاهای عددی و تئوری، اعتبار روش پیش‌بینی-تصحیح‌کننده را تقویت می‌کند و جایگاه آن را به‌عنوان روشی کلاسیک در حل معادلات دیفرانسیل کسری تثبیت می‌سازد (Mainardi, 2010؛ Caputo, 1967).

از نظر پایداری عددی، مقایسه پاسخ‌ها در جداول ۱ تا ۵ و بررسی انحراف‌ها در شکل‌های ۱ تا ۵ نشان داد که انتخاب گام بزرگ‌تر ممکن است منجر به نوسانات و حتی **تباعد** شود؛ در حالی که گام‌های کوچک‌تر نتایجی نزدیک با پاسخ تحلیلی ارائه می‌دهند (Diethelm & Freed, 1999؛ Zabidi et al., 2022). این یافته‌ها تأیید می‌کنند که روش پیش‌بینی-تصحیح‌کننده برای مسائلی با گام زمانی مناسب، کاملاً پایدار است. مزیت دیگر این روش، سادگی و قابلیت پیاده‌سازی آن در محیط‌های محاسباتی مانند MATLAB، Python و Octave است. الگوریتم گام‌به‌گام و ضرایب مبتنی بر تابع گاما و انتگرال‌های ولترا، موجب سازگاری طبیعی این روش با ساختار مشتق کاپوتو شده است.

(Garrappa, 2015; Ishteva, 2005). این ویژگی‌ها سبب می‌شوند که روش پیش‌بینی-تصحیح‌کننده حتی در کاربردهای عملی؛ مانند مدل‌سازی انتقال حرارت یا دینامیک سیستم‌های ویسکوالاستیک، ابزاری توانمند باشد (Liu et al., 2021; Bagley & Torvik, 1983)

با وجود این مزایا، مطالعه حاضر محدود به معادلات دیفرانسیل خطی و یک‌بعدی بود و مسائل غیرخطی یا چندبعدی بررسی نشدند. همچنین، پایداری عددی در انتروال‌های زمانی بسیار طولانی به‌طور جامع تحلیل نگردید (Zayernouri & Karniadakis, 2013). علاوه بر این، کاهش بیش‌ازحد اندازه گام، هرچند دقت را افزایش می‌دهد؛ اما حجم محاسبات را افزایش و نیاز به حافظه را به شدت بالا می‌برد (Li & Zeng, 2015)؛ (Ford & Simpson, 2001). در مجموع، نتایج جداول ۱ تا ۵ و گراف‌های ۱ تا ۵ نشان می‌دهند که روش پیش‌بینی-تصحیح‌کننده با انتخاب مناسب گام زمانی، دقت و پایداری بالایی ارائه می‌دهد و می‌تواند جایگزینی قابل‌اعتماد برای روش‌های تحلیلی پرهزینه یا غیرقابل اجرا باشد. پیشنهاد می‌شود در تحقیقات آینده، عملکرد این روش برای معادلات غیرخطی، سیستم‌های چندبعدی بررسی شود.

### نتیجه‌گیری

در این مقاله، روش عددی پیش‌بینی-تصحیح‌کننده برای حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه کسری از نوع کاپوتو مورد تحلیل و ارزیابی دقیق قرار گرفت. این روش که بر پایه ترکیب صریح و ضمنی در تقریب مشتقات کسری توسعه یافته است، توانسته با بهره‌گیری از ساختار گام‌به‌گام و حافظه‌محور خود، عملکرد قابل قبولی در شبیه‌سازی دینامیک سیستم‌های دارای اثرات وابسته به گذشته و حافظه طویل‌المدت ارائه دهد.

نتایج عددی حاصل از حل معادلات متجانس و غیرمتجانس نشان داد که این روش از دقت بالایی برخوردار است. به‌ویژه زمانی که گام زمانی مناسب انتخاب شود. در مواردی که گام زمانی به اندازه کافی کوچک باشد؛ مانند  $h=0.0001$ ، خطای عددی بسیار ناچیز است و پاسخ عددی عملاً با پاسخ تحلیلی مطابقت دارد. این ویژگی موجب می‌شود که روش پیش‌بینی-تصحیح‌کننده در بسیاری از کاربردهای عملی، جایگزینی مناسب برای روش‌های تحلیلی پیچیده یا غیرقابل اجرا باشد.

از نظر محاسباتی نیز، این روش تعادل مناسبی میان دقت، پایداری برقرار می‌سازد. پیاده‌سازی ساده آن در محیط‌های محاسباتی؛ مانند متلب، پایتون و اوکتیف، قابلیت به‌کارگیری آن را در مسائل انجینری و فیزیکی گسترش می‌دهد. همچنین، ویژگی گام‌به‌گام این روش امکان تنظیم انعطاف‌پذیر گام زمانی متناسب با شرایط مسئله را فراهم می‌کند.

در مجموع، می‌توان نتیجه گرفت که روش پیش‌بینی-تصحیح‌کننده، به دلیل ساختار مؤثر، دقت بالا، قابلیت مدل‌سازی پدیده‌های دارای حافظه و سادگی پیاده‌سازی، یک ابزار توانمند در حل عددی معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری محسوب می‌شود. این روش نه تنها در تحقیقات نظری بلکه در کاربردهای عملی؛ مانند مدل‌سازی پدیده‌های انتقال، کنترل سیستم‌های دینامیکی و تحلیل رفتار مواد ویسکوالاستیک نیز دارای پتانسیل بالایی است. پیشنهاد می‌شود که در تحقیقات آینده، کارایی این روش در معادلات غیرخطی، معادلات چندبعدی و نیز با بهره‌گیری از تکنیک‌های بهبودیافته عددی یا ترکیب با روش‌های یادگیری ماشین مورد بررسی قرار گیرد.

### محدودیت‌ها و پیشنهادات

اگرچه روش پیش‌بینی-تصحیح‌کننده در حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه کسری نوع کاپوتو نتایج دقیقی ارائه می‌دهد، این مطالعه محدود به معادلات خطی و یک‌بعدی بوده است. همچنین، دقت روش به شدت به انتخاب گام زمانی وابسته است و کاهش گام برای افزایش دقت، منجر به افزایش مراحل محاسباتی می‌شود. پایداری عددی در انتروال‌های زمانی طولانی نیز به‌طور کامل مورد بررسی قرار نگرفته است. در راستای گسترش این تحقیق، پیشنهاد می‌شود عملکرد این روش در معادلات غیرخطی و چندبعدی مورد بررسی قرار گیرد. همچنین، بهره‌گیری از الگوریتم‌های بهینه‌سازی و یادگیری ماشین می‌تواند به بهبود کارایی عددی و تنظیم خودکار پارامترها کمک کند. بررسی دقیق‌تر پایداری و توسعه نسخه‌های سریع‌تر و دقیق‌تر نیز می‌تواند مسیر مناسبی برای تحقیقات آینده باشد.

### سپاسگزاری

از پوهنخی ریاضیات پوهنتون کابل سپاسگزاری می‌کنیم که در انجام این تحقیق با ما همکاری تخیکی و علمی نمود. همکاری و رهنمودهای ایشان در تقویت کار تحقیقی ما نقش اساسی ایفا نمود.

### سهم نویسندگان در تحقیق

محترم استاد نورالله نوری مفهوم مقاله را طرح نموده و بر روند تحقیق نظارت کرده است. محمدجعفر حیدری و عبدالوکیل بیدار معلومات ابتدایی را ترتیب نموده‌اند. همچنان، هر سه نویسنده به‌طور مساوی در بازبینی و تحلیل معلومات سهم گرفته‌اند.

### تضاد منافع

نویسندگان تصدیق می‌نمایند که در ارتباط با این مقاله هیچ‌گونه تضاد منافع وجود ندارد.



- Bagley, R. L., & Torvik, P. J. (1983). A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. *Journal of Rheology*, 27(3), 201–210.  
<http://dx.doi.org/10.1122/1.549724>
- Caputo, M. (1967). Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent—II. *Geophysical Journal International*, 13(5), 529–539. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x>
- Deng, W. (2007). Short memory principle and a predictor–corrector approach for fractional differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 206(1), 174–188. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2006.07.006>
- Diethelm, K. (1997). An algorithm for the numerical solution of differential equations of fractional order. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 5, 1–6.  
[Link](#)
- Diethelm, K., & Freed, A. D. (1999). On the solution of nonlinear fractional order differential equations used in the modeling of viscoplasticity. In *Scientific Computing in Chemical Engineering II* (pp. 217–224). Springer.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-642-59953-5\\_21](https://doi.org/10.1007/978-3-642-59953-5_21)
- Diethelm, K., Ford, N. J., & Freed, A. D. (2002). A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations. *Nonlinear Dynamics*, 29, 3–22. <https://doi.org/10.1023/A:1016592212823>
- Diethelm, K. (2010). *The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type*. Springer.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-642-14574-2>
- Ford, N. J., & Simpson, A. C. (2001). The numerical solution of fractional differential equations: Speed versus accuracy. *Numerical Algorithms*, 26, 333–346.  
<https://doi.org/10.1023/A:1016662221662>
- Garrappa, R. (2010). On some explicit Adams-type predictor–corrector methods for fractional differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 229(2), 392–399. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2008.11.005>
- Garrappa, R. (2015). Numerical solution of fractional differential equations: a survey and a software tutorial. *Mathematics*, 3(4), 337–384.  
<https://doi.org/10.3390/math3040337>
- Heydari, M. H., & Hooshmandasl, M. R. (2013). A new numerical method for solving nonlinear fractional differential equations using predictor–corrector scheme. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, 1–10.  
<https://doi.org/10.1155/2013/184726>
- Ishteva, M. (2005). Properties and applications of the Caputo fractional operator (Report No. 5). Department of Mathematics, University of Karlsruhe.



- Kimeu, J. M. (2009). Fractional calculus: Definitions and applications. Western Kentucky University. [Link](#)
- Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations*. Elsevier.  
[https://doi.org/10.1016/S0076-5392\(05\)80002-0](https://doi.org/10.1016/S0076-5392(05)80002-0)
- Li, C., & Zeng, F. (2012). The predictor–corrector approach for fractional differential equations revisited. *Applied Mathematics Letters*, 25(9), 1355–1360.  
<https://doi.org/10.1016/j.aml.2012.05.022>
- Li, C., & Zeng, F. (2015). *Numerical methods for fractional calculus*. CRC Press.
- Li, C., Zeng, F., & Chen, Y. Q. (2015). A survey of numerical methods for fractional differential equations. *Journal of Computational Physics*, 293, 261–283.  
<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2015.01.013>
- Li, C., Zeng, F., & Liu, F. (2019). Numerical methods for fractional differential equations with nonlinear terms. *Applied Mathematics Letters*, 94, 149–155.  
<https://doi.org/10.1016/j.aml.2019.02.015>
- Liu, F., Zhuang, P., Turner, I., Burrage, K., Anh, V., & Zhang, Y. (2021). Machine learning methods for solving fractional differential equations. *Computers, Materials & Continua*, 66(1), 537–552.  
<https://doi.org/10.32604/cmc.2020.011167>
- Lubich, C. (1986). Discretized fractional calculus. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 17(3), 704–719. <https://doi.org/10.1137/0517050>
- Mainardi, F. (2010). *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity: An introduction to mathematical models*. World Scientific.  
<https://doi.org/10.1142/7435>
- Odiat, Z. M., & Shawagfeh, N. T. (2007). Generalized Taylor’s formula. *Applied Mathematics and Computation*, 186(1), 286–293.  
<https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.07.045>
- Podlubny, I. (1999). *Fractional differential equations*. Academic Press.
- Sousa, E. (2016). A second order explicit finite difference method for the fractional advection diffusion equation. *Computers & Mathematics with Applications*, 73(5), 811–825. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2016.01.016>
- Zabidi, N. A., Abdul Majid, Z., Kilicman, A., & Ibrahim, Z. B. (2022). Numerical solution of fractional differential equations with Caputo derivative by using numerical fractional predict–correct technique.  
<https://doi.org/10.1186/s13662-022-03697-6>
- Zayernouri, M., & Karniadakis, G. E. (2013). Fractional Sturm–Liouville eigen-problems: Theory and numerical approximations. *Journal of Computational Physics*, 252, 495–517. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2013.06.010>

Zeng, F., Li, C., Liu, F., & Turner, I. (2018). A stable and high-order method for the time-fractional Black–Scholes equation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 40(5), A3046–A3069. <https://doi.org/10.1137/17M1159648>