



تحلیل ترادف‌های فری مرتبه n و بررسی خواص ریاضیکی آنها

پوهنیار سعدیه سادات

دیپارتمنت الجبر، پوهنځی ریاضیات، پوهنتون کابل، کابل، افغانستان

ایمیل: sadiasadatomid@gmail.com

چکیده

ترادف‌های فری مجموعه کسرهای بین 0 و 1 اند که مخرج‌های آنها حد اکثر n است و به ترتیب صعودی مرتب شده اند. ترادف فری همیشه با $\frac{0}{1}$ شروع و با $\frac{1}{1}$ ختم می‌شود. مطالعه‌ی این ترادف‌ها طور مروجی-تحلیلی (میتود تحلیل) صورت گرفته است. ترادف‌های فری اهداف و کاربردهای گسترده‌یی در نظریه اعداد، تحلیل الگوریتم‌ها، هندسه، فزیک و حتی اقتصاد دارد. لہذا، بررسی این ترادف‌ها قابل اهمیت دانسته شده و درین مقاله ترادف فری، خواص آنها و نتایج قابل توجه ریاضیکی آنها مورد مطالعه قرار گرفته است. پس از مطالعه ترادف فری نتایج قابل توجهی در رابطه به خواص آنها به دست آمده است. از جمله یکی از خصوصیات شناخته شده‌ی آن، رابطه بین دو کسر متوالی دراین ترادف‌ها که از ساختار بازگشتی و تولیدی برخورداراند. با بهره‌گیری از خاصیت میانی، می‌توان کسرهای تازه را تولید کرد و هم‌چنان نقش ترادف فری برای نمایش نزدیک‌ترین تقریب‌های کسری به اعداد غیرناتق، نیز بررسی گردیده است.

واژه‌های کلیدی: اوسط میانی؛ تابع اوایلر؛ ترادف فری؛ تقریب گویا؛ خاصیت مجانبی؛ کسر فری

Theoretical Analysis of Farey Sequences of Order n and Their Mathematical Properties

Sadia Sadat

Department of Algebra, Mathematics Faculty, Kabul University, Kabul, Afghanistan

Email: sadiasadatomid@gmail.com

Abstract

Farey sequences are sets of irreducible fractions between 0 and 1, arranged in ascending order, with denominators less than or equal to a given natural number n . Each Farey sequence begins with $0/1$ and ends with $1/1$ and contains only fractions less than or equal to one. This paper presents a theoretical and analytical review of Farey sequences, focusing on their structural properties and mathematical significance. The investigation highlights the wide-ranging applications of these sequences in number theory, discrete mathematics, combinatorics, cryptography, spatial statistics, and even physics and economics—emphasizing their interdisciplinary relevance. A key property examined is the relationship between consecutive terms, characterized by the determinant condition $ad - bc = 1$, which reflects the adjacency of neighboring fractions. The paper also explores the mediant property used to generate new fractions within the sequence. Additionally, it discusses the role of Farey sequences in providing optimal rational approximations to irrational numbers, demonstrating their utility in both pure and applied mathematics.

Keywords: Adjacency Property; Euler Function; Farey Fractions; Farey Sequences; Mediant; Rational Approximation

ارجاع: سادات، س. (۱۴۰۴). تحلیل ترادف‌های فری مرتبه n و بررسی خواص ریاضیکی آنها. مجله علمی-تحقیقی

علوم طبیعی پوهنتون کابل، ۸(۱)، ۹۱-۱۱۳. <https://doi.org/10.62810/jns.v8i1.40>

مقدمه

ترادف‌های فری^۱ مرتبه n که به F_n نمایش داده می‌شود، ترادفی مرتب شده از کسرهای متعارف و اختصار شده بین صفر و یک هستند که صورت و مخرج آن‌ها اعداد تام غیر منفی و مخرج‌ها تا یک مقدار معین محدود شده اند و F_n طور ذیل تعریف می‌گردد:

$$F_n = \left\{ \frac{a}{b} \mid 0 \leq \frac{a}{b} \leq 1, \gcd(a, b) = 1, b \leq n \right\}$$

این ترادف‌ها همیشه با $\frac{0}{1}$ شروع و با $\frac{1}{1}$ خاتمه می‌یابد و همه کسرهای به ترتیب صعودی چیده شده اند. مثلاً ترادف‌های فری مرتبه یک و بالاتر را می‌توانیم به شکل ذیل بنویسیم:

$$F_1 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\}$$

$$F_2 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right\}$$

$$F_3 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right\}$$

$$F_4 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\}$$

$$F_5 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right\}$$

این ترادف‌ها، به دلیل برخورداری از کاربردهای وسیع در بخش‌های مختلفی؛ چون نظریه‌ی اعداد، تحلیل الگوریتم‌ها، هندسه و بسیاری از شاخه‌های دیگر، از جایگاهی با اهمیتی در مطالعات ریاضی برخوردار می‌باشند. با در نظر داشت اهمیت ساختاری و کاربردی این ترادف‌ها، هدف این مطالعه بررسی دقیق خصوصیات و ویژگی‌های اساسی آن است.

پیشینه این موضوع به سال ۱۸۱۶ بر می‌گردد. یعنی اگر چه نام فری از نام جان فری^۲ جیولوجیست بریتانیوی گرفته شده است؛ اما مشخص شده است که مطالعه اولیه در مورد ترادف‌های مشابه به آثار ریاضی‌دانانی؛ مانند هاروس^۳ در اواخر قرن ۱۹ بر می‌گردد (Farey, 1816). در سال ۱۸۱۶ جان فری مقاله‌ی منتشر کرد که در آن به خاصیت عجیب ترادف‌های کسر واقعی پرداخت و مقاله او باعث شد

^۱ Farey

^۲ John Farey

^۳ Charles Haros

تا این ترادف‌ها به نام او شناخته شده و توجه ریاضی‌دانان بیشتری به مسایل مرتبط به آن‌ها جلب شود (Farey, 1816).

ارتباط مهم دیگر ترادف فری دایره‌های فورد است که نمایش هندسی این ترادف‌ها را نشان می‌دهد. هر کسر $\frac{a}{b}$ در یک ترادف فری متناظر با یک دایره‌ی یکتا در مستوی است که شعاع آن $\frac{1}{2b^2}$ می‌باشد. این دایره‌ها دارای خواص جالبی در تماس با یک‌دیگر هستند که روابط داخل ترادف را منعکس می‌کنند. ارتباط بین ترادف فری، هندسه لباچفسکی و دومین‌های فورد، گستردگی وسیع این ترادف را فراتر از نظریه‌ی اعداد ابتدایی نشان می‌دهد (Ford, 1938).

علاوه بر ریاضیات محض، ترادف فری در کاربردهای عملی مختلفی؛ مانند نظریه موسیقی، فزیک، رمزنگاری، علوم کمپیوتر و مهندسی ظاهر می‌شوند. این ترادف به یافتن بهترین تقریب‌های گویا برای اعداد غیر ناطق کمک می‌کند که در الگوریتم‌های محاسباتی بسیار مهم است (Apostol, 1976).

با وجود خاصیت‌های عددی، ترادف فری با ساختارهای هندسی ارتباط عمیقی دارند به شکل ساختار درخت باینری عرض وجود کرده و برای نمایش منظم کسرها به کار می‌روند. این درخت امکان یافتن تقریب‌های کسر واقعی برای اعداد حقیقی را به صورت کارآمد فراهم می‌کند که در ریاضیات محاسباتی و طراحی الگوریتم‌ها بسیار ارزشمند است. هم‌چنان الگوریتم‌های مبتنی بر ترادف فری در فشرده‌سازی داده‌ها و بهینه‌سازی روندهای جستجو در علوم کمپیوتر پذیرفته می‌شود (Graham et al., 1994).

این مقاله با تمرکز بر تحلیل ساختاری، خواص ترادف‌های فری را به صورت دسته بندی شده بررسی می‌کند. در این راستا، جنبه‌های عددی و بازگشتی این ترادف‌ها تحلیل شده اند.

هدف اصلی این مقاله، ارائه یک مرور تحلیلی و جامع بر ترادف‌های فری و خواص ساختاری آن‌ها است. با مطالعه خواص عددی و بازگشتی این ترادف‌ها، مقاله تلاش دارد تا تصویری منسجم و دقیق از رفتار این ترادف‌ها ارائه دهد.

وجه تمایز این مرور در آن است که تمام خواص مهم ترادف‌های فری به صورت یکجا دسته‌بندی شده و با رویکردی تحلیلی ارائه شده اند؛ به گونه‌ی که خواننده می‌تواند تصویری منظم از خواص این ترادف عددی به دست آورد.

بینش‌ها و پیشرفت‌های جدید در باره ترادف فری وجود دارد که موارد ذیل می‌توانیم یا آوری کنیم:

توزیع و فاصله بین جمله‌ها

مطالعات اخیر که بر توزیع احصایوی فاصله‌های بین عناصر متعاقب در ترادف فری مرتبه n متمرکز شده است، نشان داده است که فاصله بین این جملات از یک الگوی خاص پیروی می‌کند و محققین ارتباط میان این الگو و مفاهیمی در نظریه‌ی اعداد؛ مانند فرضیه ریمان یافته اند (Hardy and Wright, 2008).

ارتباط با تابع زیتای ریمان

علاقه‌ی زیادی به ارتباط بین ترادف فری و تابع زیتای ریمان وجود دارد. آمار مربوط به فاصله‌های بین کسرهای فری نشان داده که رفتار آن‌ها مشابه صفرهای تابع زیتای ریمان است و این موضوع یک پل میان نظریه‌ی اعداد مقدماتی و نظریه‌ی اعداد تحلیلی پیشرفته ایجاد می‌کند (Franel and Landau, 1924).

تعمیم به ابعاد بالاتر

در حالی که ترادف فری معمولاً یک بعدی اند، محققین ترادف فری را به ابعاد بالاتر تعمیم داده اند. این تعمیم در هندسه کاربرد دارد و به ویژه در تقریب دیوفانتین مفید است (Lagarias, 1995).

الگوریتم‌های جدید برای محاسبه کارآمدتر

الگوریتم‌های سریع‌تری برای تولید ترادف‌های فری توسعه یافته اند که از کسرهای مسلسل و خواص وسطی استفاده می‌کنند. این الگوریتم‌ها کارایی محاسباتی را در مسایل بزرگ مقیاس مربوط به رمزنگاری و تحلیل عددی بهبود می‌بخشد (Brentjes, 1981).

کاربرد در فزیک

ترادف‌های فری اخیراً در فزیک، به ویژه در مطالعه سیستم‌های دینامیکی کاربرد پیدا کرده اند. نحوه‌ی سازماندهی این کسرها در F_n دیدگاه‌های جدیدی درباره قفل شدگی فاز در سیستم‌های دینامیکی ارائه می‌دهد (Bak et.al., 1985).

روش تحقیق

مطالعه، از نوع تحقیق مروری تحلیلی- ساختاری است. هدف آن گردآوری و تحلیل خواص ریاضی ترادف‌های فری از منابع معتبر و تخصصی است. بدین منظور ابتدا بیش از ۳۰ منبع علمی شامل مقالات تحقیقی، کتاب‌های کلاسیک ریاضی و منابع تخصصی منتشر شده در پایگاه‌های چون Springer و

arXiv و مقالات مروری معتبر بررسی شده اند. منابع انتخابی بر اساس معیارهای مثل ارتباط مستقیم با خواص عددی و ساختار ترادف های فری، اعتبار عملی نویسندگان مانند Apostol, Hardy و Niven و جامع بودن تحلیل ها انتخاب شده اند. هم چنین از پایان نامه ها و مقالات مروری آرشیف شده در arXiv و سایر پایگاه ها بهره گیری شده است.

یافته ها و مناقشه

مطالعه ترادف های فری مسیر طولانی و پرباری را طی کرده است. این ترادف هم چنان موضوع تحقیق و بررسی های تیوری و کاربردی در ریاضیات معاصر محسوب می شود. ترادف فری یکی از حوزه های مهم در نظریه اعداد است که دیدگاه های جدیدی را در باره ی توزیع اعداد گویا و تعامل آن با ساختارهای بنیادی ریاضیات ارایه می دهد. مطالعات نشان می دهد که ترادف فری نه تنها ساختاری عددی منظم دارند، بلکه در نظریه اعداد و شاخه های فرعی آن، نقش کلیدی بازی می کند.

ترادف های فری با این که از دیدگاه ظاهری ساده به نظر می رسند؛ اما ساختار آن ها بسیار ژرف و پیچیده است. برخی پژوهش گران؛ ترادف فری را با ترادف فیبوناچی پیوند داده اند (Alladi, 1975)، در حالی که دیگران روی ارتباط آن با فرضیه ریمان تمرکز نموده اند (Bagchi, 2024 ; Beck, 2007). در پروسس تصویر از ساختار هندسی این ترادف در بهبود الگوریتم هایی دید ماشینی استفاده کرده اند؛ اما در فریک از ترادف فری در سیستم های رزونانس و ساختار فزیک به بهره برده اند. مطالعات جدید بر تعمیم ترادف فری به ابعاد بالاتر تاکید کرده اند که در نظریه تقریب دیوفانتینی و هندسه تحلیلی کاربرد دارد (Lagarias, 1995; Matveev, 2017). در ترادف فری، هر دو کسر متعاقب $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ ، خاصیتی به صورت $bc - ad = 1$ سس دارند و کسر میانی آن ها $\frac{a+c}{b+d}$ در مرتبه بعدی ظاهر می شود. ترادف فری، تقریب های گویای خوبی برای اعداد غیر ناطق فراهم می کنند و با ساختار کسره های مسلسل در ارتباط اند. تعداد کسره های ساده شده در ترادف فری مرتبه n برابر با $1 + \sum_{k=1}^n \phi(k)$ است که $\phi(k)$ تابع اوایلر است. ترادف فری دارای تناظر نسبت به $\frac{1}{2}$ است و هر کسر $\frac{a}{b}$ متناظر با $\frac{b-a}{b}$ در همان ترادف می باشد.

ترادف های فری مرتبه n

ترادف فری مرتبه n یک ترادف از کسره های ساده شده بین عدد یک و صفر است که به طور صعودی جابجا می شود و توسط $F(n)$ نمایش داده می شود. درین کسرها (مخرج $n \geq$) است (Ford, 1938).

ترادف فری همیشه با $\frac{0}{1}$ شروع و با $\frac{1}{1}$ ختم می‌شود، یعنی کسرها بزرگ‌تر از یک نمی‌باشند.

$$\begin{aligned} F_1 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\} \\ F_2 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right\} \\ F_3 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right\} \\ F_4 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\} \\ F_5 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right\} \end{aligned}$$

جدول ۱: ترادف‌های فری مرتبه یک الی مرتبه ۹ با بعضی خواص آن

F_n	Additional terms	No of terms	Sum of additional terms	Sum of all terms
F_1	NA	2	0	1
F_2	$\left\{ \frac{1}{2} \right\}$	3	$\frac{1}{2}$	1.5
F_3	$\left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\}$	5	1	2.5
F_4	$\left\{ \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right\}$	7	1	3.5
F_5	$\left\{ \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\}$	11	2	5.5
F_6	$\left\{ \frac{1}{6}, \frac{5}{6} \right\}$	13	1	6.5
F_7	$\left\{ \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7} \right\}$	19	3	9.5
F_8	$\left\{ \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8} \right\}$	23	2	11.5
F_9	$\left\{ \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9} \right\}$	29	3	14.5

در جدول ۱ برای F_n تا $n = 9$ تعداد عناصر، حاصل جمع عناصر اضافی، عناصر اضافی و حاصل جمع تمام عناصر آن‌ها داده شده نظر به قیمت‌های داده شده می‌توانیم بعضی روابط را حدت بزنیم؛ اما بازهم برای دانستن این که چگونه جدول را بنویسیم، بعضی قضایا را بیان می‌نماییم.

قضیه ۱. اگر $\frac{a}{b}$ و $\frac{a'}{b'}$ دو کسر متعاقب در F_n باشد، طوری که $\frac{a'}{b'} < \frac{a}{b}$ باشد؛ پس $ba' - ab' = 1$ است (خاصیت مجانبی (Beiler, 1964).

ثبوت: با استفاده از استقراء ریاضی برای n داریم که:

مرحله اول: برای $n = 1$ ، $F_1 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\}$ و دو کسر متعاقب آن را در نظر می‌گیریم $\frac{0}{1} < \frac{1}{1}$ و $ba' - ab' = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 = 1$ نتیجه برای $n = 1$ درست است.

مرحله دوم: فرض می‌نماییم که نتیجه برای سطر $(n - 1)$ ام درست باشد. یعنی برای F_{n-1} هرگاه $\frac{a}{b}$ و $\frac{a'}{b'}$ دو کسر متعاقب در F_{n-1} باشند؛ پس:

$$ba' - ab' = 1 \quad \dots (*)$$

مرحله سوم: در F_{n-1} ، $\frac{a}{b}$ و $\frac{a'}{b'}$ دو کسر متعاقب اند؛ هرگاه این دو کسر را در F_n در نظر بگیریم، دو حالت وجود دارد:

حالت اول: هرگاه بین دو کسر متذکره کسری دیگر موجود نباشد، پس نتیجه برای آن صدق می‌نماید.

حالت دوم: هرگاه $\frac{a}{b}$ و $\frac{a+a'}{b+b'}$ دو کسر متعاقب در F_n باشند؛ پس:

$$b(a+a') - a(b+b') = ba + ba' - ab - ab' = ba' - ab' = 1 \quad * \text{ با استفاده از}$$

و اگر $\frac{a'}{b'}$ و $\frac{a+a'}{b+b'}$ دو کسر متعاقب در F_n باشند پس:

$$(b+b')a' - (a+a')b' = ba' + b'a' - ab' - a'b' = ba' - ab' = 1 \quad * \text{ با استفاده از}$$

بنابراین، نتیجه برای تمام اعداد طبیعی n درست است.

نتیجه ۱: اگر $\frac{a}{b}$ و $\frac{a'}{b'}$ دو کسر متعاقب در F_n باشد طوری که $\frac{a'}{b'} < \frac{a}{b}$ پس تفاوت آن‌ها $\frac{1}{bb'}$ هست.

(Farey, 1816)

ثبوت: با استفاده از خاصیت $ba' - ab' = 1$ داریم که:

$$\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} = \frac{ba' - ab'}{bb'} = \frac{1}{bb'}$$

نتیجه ۲: هر کسر فری $\frac{a}{b}$ به شکل ساده (اختصار یافته) است یعنی $\gcd(a, b) = 1$ است

(Niven et al., 1991).

ثبوت: هرگاه $\frac{a}{b} \in F_n$ باشد چون در F_n بیشتر از یک حد است پس فرض کنیم $\frac{a'}{b'}$ حد متعاقب $\frac{a}{b}$

باشد طوری که $\frac{a'}{b'} < \frac{a}{b}$ ؛ پس:

$$ba' - ab' = 1 \quad \dots (1)$$

می‌دانیم که معادله $bx + ay = 1$ دارای حل است اگر و تنها اگر؛

$$\gcd(a, b) = 1 \quad \dots (2)$$

باشد با مقایسه (۱) و (۲) معادله $bx + ay = 1$ دارای حل $x = a', y = -b'$ است بناءً

$$\gcd(a, b) = \gcd(b, a) = 1$$

قضیه ۲. اگر $\frac{a}{b}$ و $\frac{a'}{b'}$ دو کسر متعاقب در F_n باشند پس در بین تمام کسور ناطق بین آن‌ها $\frac{a+a'}{b+b'}$ کسری

است با کوچک‌ترین مخرج و این کسر یکتا است. کسر $\frac{a+a'}{b+b'}$ را اوسط میانی گویند (Rosen, 2011).

ثبوت: چون $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'}$ دو کسر فری متعاقب در یک ترادف فری است. بنابراین؛

$$ba' - ab' = 1$$

و هم چنان می‌دانیم که:

$$\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+a'}{b+b'} < \frac{a'}{b'}$$

در حالی که $\frac{a+a'}{b+b'}$ اولین کسری خواهد بود که در سطر اول بین $\frac{a}{b}$ و $\frac{a'}{b'}$ ظاهر خواهد شد. با ادامه دادن به این روند خواهیم دید که این کسر برای اولین بار در سطر $b+b'$ ام ظاهر خواهد شد. حال تصور

کنیم که $\frac{x}{y}$ کسری اختیاری است که بین $\frac{a}{b}$ و $\frac{a'}{b'}$ قرار دارد؛ چون:

$$\frac{a}{b} < \frac{x}{y} < \frac{a'}{b'}$$

است. پس:

$$\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} = \left(\frac{a'}{b'} - \frac{x}{y} \right) + \left(\frac{x}{y} - \frac{a}{b} \right) = \frac{a'y - b'x}{b'y} + \frac{bx - ay}{by} \geq \frac{1}{b'y} + \frac{1}{by} = \frac{b+b'}{bb'y}$$

زیرا:

$$\frac{a'}{b'} > \frac{x}{y} \Rightarrow a'y > b'x \Rightarrow a'y - b'x > 0 \Rightarrow a'y - b'x \geq 1$$

به عین ترتیب $bx - ay \geq 1$ است بناءً

$$\frac{a'b - b'a}{b'y} \geq \frac{b+b'}{bb'y} \dots (1) \Rightarrow \frac{1}{b'b} \geq \frac{b+b'}{bb'y} \Rightarrow y \geq b+b'$$

اگر $y > b+b'$ باشد پس کسر فری $\frac{x}{y}$ دارای کوچکترین مخرج بین $\frac{a}{b}$ و $\frac{a'}{b'}$ نیست و اگر $y =$

$b+b'$ باشد؛ پس نامساوات (۱) باید به مساوات تبدیل گردد. بنابراین، داریم که؛

$$a'y - b'x = 1 \quad \text{و} \quad bx - ay = 1$$

یعنی:

$$b'x - a'y + 1 = 0 \quad \text{و} \quad bx - ay - 1 = 0$$

با حل این معادلات داریم که؛

$$\frac{x}{a+a'} = \frac{y}{b+b'} = \frac{1}{a'b - ab'} \Rightarrow \frac{x}{a+a'} = \frac{y}{b+b'} = 1$$

$$\Rightarrow x = a + a' , y = b + b' \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a + a'}{b + b'}$$

قضیه ۳. تعداد عناصر در یک ترادف فری مرتبه n ، عبارت است از:

$$|F_n| = 1 + \phi(1) + \phi(2) + \dots + \phi(n)$$

در حالیکه $|F_n|$ تعداد عناصر F_n یا طول آن بوده و ϕ تابع اوایلر است (Beiler, 1964)

ثبوت: طوری که می‌دانیم F_n در بردارنده‌ی

(i) تمام حدود ترادف F_{n-1}

(ii) حدود جدید یا حدود اضافی F_n می‌باشد؛ چون حدود جدید دارای شکل $\frac{m}{n}$ است؛ پس:

حالت اول: هرگاه $\gcd(m, n) \neq 1$ باشد در آن صورت $\frac{m}{n}$ قبلاً در ترادف قبلی شامل بوده است. بنابراین، در F_n نیز شامل است.

حالت دوم: هرگاه بزرگترین قاسم مشترک m و n یک باشد یعنی $\gcd(m, n) = 1$ باشد، در آن صورت m و n با هم اول (بزرگ‌ترین قاسم مشترک بین آن‌ها یک است) بوده پس $\frac{m}{n}$ یک حد جدید در F_n است و تعداد این حدود مساوی به $\phi(n)$ است در حالیکه ϕ تابع اوایلر است. در نتیجه:

$$|F_n| = |F_{n-1}| + \phi(n), \quad n > 1 \quad \dots (1)$$

$$|F_1| = 2$$

$$|F_2| = |F_1| + \phi(2) = 2 + 1 = 3 = 1 + \phi(1) + \phi(2)$$

$$|F_3| = |F_2| + \phi(3) = 1 + \phi(1) + \phi(2) + \phi(3)$$

$$|F_n| = 1 + \phi(1) + \phi(2) + \dots + \phi(n) = 1 + \sum_{k=1}^n \phi(k)$$

قضیه ۴. اگر $0 \leq x \leq y$ باشد، طوری که $\gcd(x, y) = 1$ پس کسر $\frac{x}{y}$ در F_y و ترادف‌های بعدی ظاهر می‌شود (Niven et al., 1991).

ثبوت: این واضح است که اگر $\frac{x}{y}$ در سطر y ام ظاهر شود؛ پس در تمام سطرها‌ی بعدی نیز ظاهر می‌شود. بنابراین، برای ثبوت کافی است که نشان دهیم که $\frac{x}{y}$ در سطر y ام ظاهر می‌شود و این قضیه را با استفاده از اندکشن ریاضی بالای y ثبوت می‌کنیم.

مرحله اول: برای $y = 1$ کسرها‌ی فری $\frac{0}{1}$ و $\frac{1}{1}$ در سطر اول و سطرها‌ی بعدی ظاهر می‌گردد.

مرحله دوم: فرضاً نتیجه تا $y = n$ صدق نماید.

مرحله سوم: برای $y = n + 1$ کسر فری $\frac{x}{y}$ نمی تواند که در سطر n ظاهر شود. بنابراین، باید $\frac{x}{n+1}$ در بین دو کسر فری متعاقب در سطر n ظاهر شود و هرگاه $\frac{a}{b}$ و $\frac{a'}{b'}$ دو کسر متعاقب در هر سطر که باشند، پس $\frac{a+a'}{b+b'}$ کسری فری یکتایی با کوچک ترین مخرج در بین آنها است. در نتیجه، $\frac{x}{n+1}$ در سطر $n+1$ ظاهر می شود. یعنی $\frac{x}{y}$ در سطر y ظاهر می شود.

قضیه ۵. هرگاه $\frac{a}{b}$ و $\frac{a'}{b'}$ دو کسر هم جوار در F_n باشند؛ پس:

$$\min\left(\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b}\right) = \frac{1}{n(n-1)}$$

و

$$\max\left(\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b}\right) = \frac{1}{n}$$

است (Hardy & Wright, 2008).

قضیه ۶. هرگاه $\frac{a}{b}$ ، $\frac{a'}{b'}$ و $\frac{a''}{b''}$ سه کسر متعاقب در F_n باشند؛ پس حد وسطی آن عبارت است از

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a + a''}{b + b''}$$

است (Hardy and Wright, 2008; Niven et al., 1991).

ثبوت: فرض کنیم $\frac{a}{b}$ ، $\frac{a'}{b'}$ و $\frac{a''}{b''}$ سه کسر متعاقب در F_n باشند. پس:

$$\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'} < \frac{a''}{b''}$$

بوده؛ بنابراین، $ba' - ab' = 1$ و $b'a'' - a'b'' = 1$ است و داریم که:

$$ba' - ab' = b'a'' - a'b'' = 1$$

$$\Rightarrow b'(a + a'') = a'(b + b'')$$

$$\Rightarrow \frac{a'}{b'} = \frac{a + a''}{b + b''}$$

قضیه ۷. اگر $\frac{a}{b}$ یک کسر فری مرتبه n باشد؛ پس $\frac{b-a}{b}$ نیز یک کسر فری مرتبه n است (Farey, 1816).

ثبوت: چون $\frac{a}{b} \in F_n$ است پس داریم؛

$$1) \gcd(a, b) = 1$$

$$2) b \leq n$$

$$3) 0 \leq a \leq b$$

حال نظر به روابط فوق برای $\frac{b-a}{b}$ می‌توانیم بنویسیم که:

$$1) \gcd(b-a, b) = 1 \quad 2) b \leq n \quad 3) 0 \leq b-a \leq b$$

در نتیجه:

$$\frac{b-a}{b} \in F_n$$

است.

بیانیه. هرگاه $\frac{a}{b}$ و $\frac{a'}{b'}$ کسره‌های فری مرتبه n به طرف چپ و راست $\frac{1}{2}$ باشند؛ پس:

$$b = b' = 1 + 2 \left[\frac{n-1}{2} \right]$$

و هم‌چنان $a + a' = b$ است (Hardy & Wright, 2008).

ثبوت: کسر $\frac{1}{2}$ در تمام ترادف‌های فری مرتبه n ، $n > 1$ وجود دارد ما نتیجه مطلوب را با استفاده از اندکشن ریاضی ثبوت می‌نماییم.

مرحله اول (آغاز اندکشن): برای $n = 2$ ترادف فری مرتبه ۲ را می‌نویسیم:

$$F_2 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right\}, \quad \frac{a}{b} = \frac{0}{1}, \quad \frac{a'}{b'} = \frac{1}{1}, \quad b = b' = 1 \quad \dots (1)$$

و هم‌چنان:

$$1 + 2 \left[\frac{2-1}{2} \right] = 1 + 2 \left[\frac{1}{2} \right] = 1 + 2(0) = 1 \quad \dots (2)$$

با توجه به روابط (1) و (2) درستی رابطه برای $n = 2$ دیده می‌شود و هم‌چنان:

$$a + a' = 0 + 1 = 1 = b$$

مرحله دوم (فرضیه اندکشن): فرض می‌نماییم که نتیجه برای $n \geq 2$ درست باشد. یعنی:

اگر $\frac{a}{b}$ و $\frac{a'}{b'}$ کسره‌های فری در F_n باشند که در دو طرف $\frac{1}{2}$ موقعیت دارند. پس:

$$b = b' = 1 + 2 \left[\frac{n-1}{2} \right]$$

بوده و هم‌چنان که $a + a' = b$ باشد.

مرحله سوم: برای F_{n+1} دو حالت را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: هرگاه n یک عدد جفت باشد. پس:

$$\frac{c}{d} = \frac{a+1}{b+2} = \frac{a+1}{n+1}, \quad \frac{c'}{d'} = \frac{a'+1}{b'+2} = \frac{a'+1}{n+1}$$

به طور واضح دیده می شود که $d = d' = n + 1$ پس d بزرگ ترین عدد تاق تام است طوری که

$$d = n + 1 = 1 + n = 1 + 2\left(\frac{n}{2}\right) = 1 + 2\left[\frac{n}{2}\right] = 1 + 2\left[\frac{(n+1)-1}{2}\right]$$

حال برای ثبوت بخش دوم در نظر می گیریم که:

$$c + c' = (a + 1) + (a' + 1) = (a + a') + 2 = b + 2 = n + 1 = d$$

حالت دوم: اگر n یک عدد تاق باشد. پس:

$$b + 2 > n + 1, \quad b' + 2 > n + 1$$

ازین جا می توانیم بنویسیم که:

$$n + 1 < b + 2 < n + 2 \quad (\because b \leq n) \Rightarrow b + 2 = n + 2 \Rightarrow n = b$$

چون n تاق است پس b تاق بوده و هم چنان $b + 2$ نیز تاق است. قسمی که می دانیم n تاق است.

پس می گیریم که:

$$n = 2k + 1, \quad k \in \mathbb{Z}_+$$

$$\therefore b = n = 1 + 2k = 1 + 2[k] = 1 + 2\left[k + \frac{1}{2}\right] = 1 + 2\left[\frac{2k+1}{2}\right] = 1 + 2\left[\frac{n}{2}\right]$$

$$\Rightarrow b = 1 + 2\left[\frac{n}{2}\right] = 1 + 2\left[\frac{(n+1)-1}{2}\right]$$

بنابراین، برای تمام اعداد طبیعی $n > 1$ نتیجه صادق است.

قضیه ۱. اگر $\frac{a}{b} \in F_n$ باشد. پس:

$$\frac{a}{b} \neq \frac{b-a}{b} \quad \text{for } b \geq 3$$

(Hardy & Wright, 2008)

ثبوت (روش غیر مستقیم): هرگاه $\frac{a}{b} = \frac{b-a}{b}$ از این جا $b = 2a$ بوده، بنابراین،

$$\gcd(a, b) = \gcd(a, 2a) = a$$

اگر $a = 1$ شود پس $b = 2$ بوده می تواند. پس: a و b اول نبوده در نتیجه، $\frac{a}{b} \notin F_n$ و این یک

تناقض است.

بنابراین، $\frac{a}{b} \neq \frac{b-a}{b}$ است.

قضیه ۹. حاصل جمع تمام کسرهای فری مرتبه n مساوی است به $\frac{1}{2} |F_n|$ (Hardy & Wright, 2008).

ثبوت: اگر این حاصل جمع را به $S_n = S(n)$ نمایش دهیم، داریم که:

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{\frac{a}{b} \in F_n} \frac{a}{b} = \sum_{\frac{a}{b} \in F_n, b \leq 2} \frac{a}{b} + \sum_{\frac{a}{b} \in F_n, b \geq 3} \frac{a}{b} = \left(\frac{0}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}(|F_n| - 3) \\ &= 1.5 + \frac{1}{2}|F_n| - 1.5 = \frac{1}{2}|F_n| = \frac{1}{2}(1 + \phi(1) + \dots + \phi(n)) \end{aligned}$$

زیرا، سه کسر را از تعداد عناصر به طور جداگانه جمع نمودیم پس تعداد عناصر $3 - |F_n|$ با $b \geq 3$ بوده و در آن جا به تعداد $\frac{1}{2}(|F_n| - 3)$ حدود جوهره‌یی به شکل $\frac{b-a}{b}$ و $\frac{a}{b}$ وجود دارند که حاصل جمع آن حدود یک می شود.

قضیه ۱۰. تمام کسرهای فری از $\frac{0}{1}$ الی $\frac{1}{1}$ شامل ترادف فری مرتبه n را در نظر گیرید، هرگاه $b_1 = 1$ و $b_k = 1$ طوری که $b_1, b_2, \dots, b_k$ مخارج‌های این کسرها از چپ به راست باشند.

$$\sum_{j=1}^{k-1} (b_j b_{j+1})^{-1} = 1$$

ثبوت:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k-1} (b_j b_{j+1})^{-1} &= \frac{1}{b_1 b_2} + \frac{1}{b_2 b_3} + \frac{1}{b_3 b_4} + \dots + \frac{1}{b_{k-1} b_k} \\ &= \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{b_1 b_2} + \frac{b_2 a_3 - a_2 b_3}{b_2 b_3} + \dots + \frac{b_{k-1} a_k - a_{k-1} b_k}{b_{k-1} b_k} \\ &= \left(\frac{a_2}{b_2} - \frac{a_1}{b_1}\right) + \left(\frac{a_3}{b_3} - \frac{a_2}{b_2}\right) + \dots + \left(\frac{a_k}{b_k} - \frac{a_{k-1}}{b_{k-1}}\right) \\ &= \frac{a_k}{b_k} - \frac{a_1}{b_1} = \frac{1}{1} - \frac{0}{1} = 1 \end{aligned}$$

قضیه ۱۱. برای $n > 1$ هیچ دو کسر متعاقب در F_n مخارج‌های یک سان ندارند.

$$\text{ثبوت: } F_n = \left\{ \frac{h}{k} \mid k \neq 0, 0 \leq h \leq k \leq n, (h, k) = 1 \right\}$$

اگر $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'}$ ازینجا $b + b' > n$ است. فرض کنیم که $b = b'$ است. هرگاه $\frac{a}{b}$ و $\frac{a'}{b'}$ دو کسر متعاقب باشند، $\frac{1}{2} \in F_n$ را برای $n \geq 2$ در نظر گیرید، پس:

$$\frac{a}{b} \neq 1 \neq \frac{a'}{b'} = \frac{a'}{b} \quad \therefore a < a' < b$$

واضح است که $\frac{a}{b-1} < \frac{a+1}{b}$ و $\frac{a+1}{b} < \frac{a'}{b}$ و $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b-1}$ هم چنان $\frac{a}{b-1} < \frac{a+1}{b}$ داریم که:

$$\frac{a}{b} < \frac{a}{b-1} < \frac{a+1}{b} < \frac{a'}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a}{b-1} < \frac{a'}{b}$$

و این یک تناقض است. در نتیجه؛ $b \neq b'$ است.

مسئله. هرگاه $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ دو کسر فری مرتبه n باشند. طوری که $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ پس $\frac{a}{b} \leq \frac{1}{n} - \frac{c}{d}$.

ثبوت: کسره‌های فری مرتبه n که به شکل ذیل است، در نظر بگیرید:

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} \quad (1)$$

حالت اول: اگر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ در بین کسره‌های فوق قرار داشته باشند؛ پس واضح است که $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} \leq \frac{1}{n}$.

حالت دوم: اگر یکی از کسره‌های $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ به طرف چپ $\frac{j}{n}$ ، $n = 1, 2, \dots, n$ و دیگری آن به طرف راست آن باشد؛ پس $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ متعاقب نبوده و این تضاد است.

حالت سوم: هرگاه $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ دو کسری باشند که در (۱) ذکر شده اند؛ پس $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}$.

مسئله. در هر ترادف فری حاصل جمع عناصر در مخرج کسرها مساوی به دوچند حاصل جمع عناصر در صورت است.

یک خاصیت مهم ترادف فری این است که اگر $\frac{a}{b} \in F_n$ باشد، داریم که:

$$\gcd(a, b) = 1, \quad 1 \leq b \leq n$$

قسمی که قبلاً آرایه گردید، تعداد کل این کسرها مساوی است به:

$$|F_n| = 1 + \sum_{b=1}^n \phi(b)$$

که در آن تابع اوایلر $\phi(b)$ تعداد اعداد صحیح a را نشان می‌دهد طوری که

$$\gcd(a, b) = 1, \quad 1 \leq a \leq b$$

حاصل جمع عناصر صورت را می‌توان نوشت که:

$$S_N = \sum_{b=1}^n \sum_{\gcd(a,b)=1} a$$

رابطه‌ی ذیل یکی از رابطه‌های مهم در نظریه‌ی اعداد است.

$$\sum_{\gcd(p,q)=1} p = \frac{q}{2} \phi(q)$$

رابطه فوق برقرار است. چون در ترادف‌های فری متقارن هر کسر فری موجود است بناءً اگر برای هر p متقارن آن $q - p$ وجود دارد. طوری که که مجموع آن‌ها $\frac{q}{2} \phi(q)$ می‌شود.

پس مجموع صورت‌ها در ترادف فری برابر است با:

$$S_N = \sum_{b=1}^n \frac{b}{2} \phi(b) = \frac{S_D}{2}$$

در حالی که S_D مجموع مخرج‌ها است، از این جا نتیجه مطلوب به دست می‌آید.

تقریب ناطق. اگر $\frac{a'}{b'}$ و $\frac{a}{b}$ دو کسر فری مرتبه n در F_n باشد، طوری که دیگر کسر فری در بین آن‌ها وجود نداشته باشد؛ پس:

$$\left| \frac{a}{b} - \frac{a+a'}{b+b'} \right| = \frac{1}{b(b+b')} \leq \frac{1}{b(n+1)} \quad \bullet$$

$$\left| \frac{a'}{b'} - \frac{a+a'}{b+b'} \right| = \frac{1}{b'(b+b')} \leq \frac{1}{b'(n+1)} \quad \bullet$$

چون اگر $\frac{a}{b}$ و $\frac{a'}{b'}$ دو کسر فری متعاقب در F_n باشند، طوری که $\frac{a'}{b'} < \frac{a}{b}$ است. پس:

$$ab' - b'a = 1 \quad \dots (1)$$

حال داریم که:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a}{b} - \frac{a+a'}{b+b'} \right| &= \left| \frac{ab + ab' - ba - ba'}{b(b+b')} \right| = \frac{|b'a - a'b|}{b(b+b')} = \frac{1}{b(b+b')} \\ &\leq \frac{1}{b(n+1)} \quad \text{using (1)} \end{aligned}$$

زیرا $\frac{a'}{b'} < \frac{a}{b}$ دو کسر متعاقب در F_n اند در F_{n+1} می‌تواند ظاهر شود یا می‌تواند در F_{n+2} باشد؛ پس:

$$b + b' \geq n + 1 \Rightarrow \frac{1}{b+b'} \leq \frac{1}{n+1}$$

حال:

$$\left| \frac{a'}{b'} - \frac{a+a'}{b+b'} \right| = \left| \frac{a'b' - ab' - b'a' + ba'}{b'(b+b')} \right| = \frac{|b'a - a'b|}{b'(b+b')} = \frac{1}{b'(b+b')} \leq \frac{1}{b'(n+1)}$$

و این نتیجه مطلوب است.

مسئله. اگر n یک عدد تام مثبت بوده و x یک عدد ناطق $\frac{a}{b}$ باشد، طوری که $0 < b \leq n$ پس:

$$\left| x - \frac{a}{b} \right| \leq \frac{1}{b(n+1)} \quad (\text{Rational approximation})$$

فرض کنیم x یک عددی حقیقی است که بین دو عدد تام k و $k+1$ قرار دارد؛ یعنی،

$$k \leq x \leq k+1$$

بین صفر و یک x را در نظر می‌گیریم. یعنی $0 \leq x \leq 1$ درینجا $k = 0$ در نظر گرفته شده است.

حالت اول: عدد حقیقی x ، در ترادف فری F_n اگر باشد، یعنی $\frac{a}{b} \in F_n$ ، $0 < b \leq n$ پس:

$$\left| x - \frac{a}{b} \right| = 0 \leq \frac{1}{b(n+1)}$$

حالت دوم: اگر عدد حقیقی x بین دو کسر متعاقب $\frac{a}{b}$ و $\frac{a'}{b'}$ در F_n قرار داشته باشد؛

۱. اگر x کوچکتر از $\frac{a+a'}{b+b'}$ باشد یعنی:

$$\frac{a}{b} < x < \frac{a+a'}{b+b'} < \frac{a'}{b'}, \quad 0 < b \leq n, \quad 0 < b' \leq n$$

حال داریم که:

$$\left| x - \frac{a}{b} \right| \leq \left| \frac{a+a'}{b+b'} - \frac{a}{b} \right| = \frac{1}{b(b+b')} \leq \frac{1}{b(n+1)}$$

۲. اگر عدد حقیقی x بزرگتر از $\frac{a+a'}{b+b'}$ باشد.

$$\left| x - \frac{a'}{b'} \right| \leq \left| \frac{a'}{b'} - \frac{a+a'}{b+b'} \right| = \frac{1}{b'(b+b')} \leq \frac{1}{b'(n+1)}$$

و در نتیجه:

$$\left| x - \frac{a}{b} \right| \leq \frac{1}{b(n+1)}, \quad \left| x - \frac{a'}{b'} \right| \leq \frac{1}{b'(n+1)}$$

قرار شرح فوق، نتیجه مطلوب حاصل شد.

تقریب گویای اعداد غیر ناطق

اگر ξ یک عدد حقیقی و غیر ناطق باشد؛ پس بی‌نهایت اعداد ناطق متمایز $\frac{a}{b}$ وجود دارد. طوری که:

$$\left| \xi - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{b^2}$$

ثبوت: برای هر $n > 0$ یعنی $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ اعداد ناطق $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}$ را دریافت نموده می‌توانیم. طوری که:

$$0 < b_1 \leq 1, \quad 0 < b_2 \leq 2, \quad 0 < b_3 \leq 3, \quad \dots, \quad 0 < b_n \leq n$$

و:

$$\left| \xi - \frac{a_n}{b_n} \right| \leq \frac{1}{b_n(n+1)} < \frac{1}{b_n^2}$$

چون:

$$0 < b_n \leq n < n+1, \quad 1 \leq b_n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{b_n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{b_n}$$

$$\Rightarrow \left| \xi - \frac{a_n}{b_n} \right| < \frac{1}{b_n^2} \quad \dots \dots \dots (1)$$

بسیاری از $\frac{a_i}{b_i}$ ها ممکن مساوی باشند با هم؛ اما در این جا بی‌نهایت کسرهای متمایز وجود دارند.

به روش غیر مستقیم: فرض کنیم در این جا اعداد متناهی و متمایز $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}$ وجود دارند. بنابراین، در بین اعداد متناهی:

$$\left| \xi - \frac{a_1}{b_1} \right|, \left| \xi - \frac{a_2}{b_2} \right|, \dots, \left| \xi - \frac{a_n}{b_n} \right|$$

یک قیمت مینیمم یا اصغری وجود دارد. فرض کنیم این قیمت اصغری برای $n = k$ وجود داشته باشد. یعنی $\left| \xi - \frac{a_k}{b_k} \right|$ قیمت اصغری است.

$$\left| \xi - \frac{a_n}{b_n} \right| > \left| \xi - \frac{a_k}{b_k} \right|, \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

اما $\left| \xi - \frac{a_k}{b_k} \right| > 0$ زیرا ξ یک عدد ناطق نیست و نمی‌تواند که مساوی به $\frac{a_k}{b_k}$ باشد. بنابراین، می‌توانیم که یک عدد طبیعی فوق العاده بزرگ n را دریافت کنیم طوری که:

$$0 < \frac{1}{n+1} < \left| \xi - \frac{a_k}{b_k} \right| \dots \dots \dots (3)$$

حال در نظر گیرید:

$$\left| \xi - \frac{a_k}{b_k} \right| \leq \left| \xi - \frac{a_n}{b_n} \right| \leq \frac{1}{b_n(n+1)} \leq \frac{1}{n+1}$$

زیرا:

$$1 \leq b_n \Rightarrow 1 \geq \frac{1}{b_n} \Rightarrow \frac{1}{b_n} \leq \frac{1}{1} \Rightarrow \frac{1}{b_n(n+1)} \leq \frac{1}{n+1}$$

پس:

$$\begin{aligned} \left| \xi - \frac{a_k}{b_k} \right| &\leq \left| \xi - \frac{a_n}{b_n} \right| \leq \frac{1}{b_n(n+1)} \leq \frac{1}{n+1} < \left| \xi - \frac{a_k}{b_k} \right| \\ \Rightarrow \left| \xi - \frac{a_k}{b_k} \right| &< \left| \xi - \frac{a_k}{b_k} \right| \end{aligned}$$

و این امکان ندارد. بنابراین، فرضیه ما غلط بوده و در نتیجه بی‌شمار اعداد غیر ناطق متمایز $\frac{a}{b}$ وجود دارد. طوری که:

$$\left| \xi - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{b^2}$$

بیانیه. اگر ξ یک عدد غیر ناطق است؛ پس بی‌شمار اعداد ناطق متمایز $\frac{h}{k}$ وجود دارد؛ طوری که:

$$\left| \xi - \frac{h}{k} \right| < \frac{1}{5k^2} \quad \dots \quad (1)$$

ثبوت: فرض کنیم ξ یک عدد غیر ناطق باشد که بین دو عدد تام متعاقب k و $k+1$ واقع است. یعنی $k < \xi < k+1$ حال با گرفتن $k=0$ می‌توانیم ξ را بین صفر و یک انتقال بدهیم. فرض کنیم n یک عدد نام مثبت باشد؛ پس دو کسر متعاقب $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ در ترادف فری مرتبه n یعنی $F(n)$ وجود دارد، طوری که:

$$\frac{a}{b} < \xi < \frac{c}{d}$$

چون $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ است بنابراین، حال دو حالت را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: اگر $\frac{a+c}{b+d} < \xi$ باشد فرض کنیم که:

$$\xi - \frac{a}{b} \geq \frac{1}{b^2\sqrt{5}}, \quad \frac{a+c}{b+d} - \xi \geq \frac{1}{(b+d)^2\sqrt{5}}, \quad \frac{c}{d} - \xi \geq \frac{1}{d^2\sqrt{5}} \quad \dots (1)$$

حال:

$$\begin{aligned} \frac{c}{d} - \frac{a}{b} &= \left(\frac{c}{d} - \xi\right) + \left(\xi - \frac{a}{b}\right) \geq \frac{1}{d^2\sqrt{5}} + \frac{1}{b^2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{d^2} + \frac{1}{b^2}\right) \\ \Rightarrow \frac{1}{bd} &\geq \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{d^2} + \frac{1}{b^2}\right) \quad \dots (2) \end{aligned}$$

هم‌چنان:

$$\begin{aligned} \frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} &\geq \left(\frac{a+c}{b+d} - \xi\right) + \left(\xi - \frac{a}{b}\right) \geq \frac{1}{(b+d)^2\sqrt{5}} + \frac{1}{b^2\sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{(b+d)^2} + \frac{1}{b^2}\right) \\ \Rightarrow \frac{1}{b(b+d)} &\geq \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{(b+d)^2} + \frac{1}{b^2}\right) \quad \dots (3) \end{aligned}$$

روابط (۲) و (۳) همزمان درست بوده نمی‌توانند و این یک تناقض است. بنابراین، فرضیه ما نادرست بوده و یک $\frac{h}{k}$ وجود دارد؛ طوریکه: حد اقل یکی از نامساوت‌های رابطه (۱) صدق نمی‌کند و این موجودیت $\frac{h}{k}$ را در حالتی ثبوت می‌کند که $\xi < \frac{a+c}{b+d}$ باشد.

حالت دوم: اگر $\xi > \frac{a+c}{b+d}$ باشد فرض کنیم که:

$$\begin{aligned} \xi - \frac{a}{b} &\geq \frac{1}{b^2\sqrt{5}}, \quad \xi - \frac{a+c}{b+d} \geq \frac{1}{(b+d)^2\sqrt{5}}, \quad \frac{c}{d} - \xi \geq \frac{1}{d^2\sqrt{5}} \quad \dots (4) \\ \frac{c}{d} - \frac{a}{b} &= \left(\frac{c}{d} - \xi\right) + \left(\xi - \frac{a}{b}\right) \geq \frac{1}{d^2\sqrt{5}} + \frac{1}{b^2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{d^2} + \frac{1}{b^2}\right) \\ \Rightarrow \frac{1}{bd} &\geq \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{d^2} + \frac{1}{b^2}\right) \quad \dots (5) \end{aligned}$$

هم‌چنان:

$$\begin{aligned} \frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} &\geq \left(\frac{c}{d} - \xi\right) + \left(\xi - \frac{a+c}{b+d}\right) \geq \frac{1}{d^2\sqrt{5}} + \frac{1}{(b+d)^2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{(b+d)^2} + \frac{1}{b^2}\right) \\ \Rightarrow \frac{1}{d(b+d)} &\geq \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{d^2} + \frac{1}{(b+d)^2}\right) \quad \dots (6) \end{aligned}$$

باز هم مانند حالت اول این یک تناقض است؛ زیرا روابط (۵) و (۶) همزمان صدق نمی‌کند. بنابراین، فرضیه ما غلط بوده و یک $\frac{h}{k}$ وجود دارد. طوریکه نتیجه صدق می‌کند. یعنی:

$$\left| \xi - \frac{h}{k} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}k^2}$$

در حقیقت $\frac{h}{k}$ یکی از کسرهای $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ یا $\frac{a+c}{b+d}$ است؛ در حالی که $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ دو کسر فری متعاقب در F_n بود و $\frac{a}{b} < \xi < \frac{c}{d}$ است.

حال:

$$\begin{aligned} \left| \xi - \frac{h}{k} \right| &< \left| \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \right| = \left| \left(\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} \right) + \left(\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} \right) \right| \\ &\leq \left| \left(\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} \right) \right| + \left| \left(\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{d(n+1)} + \frac{1}{b(n+1)} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \\ &\Rightarrow \left| \xi - \frac{h}{k} \right| < \frac{2}{n+1} \quad \dots \quad (*) \end{aligned}$$

حال می‌خواهیم نشان دهیم که تعداد این کسرهای $\frac{h}{k}$ بی‌نهایت است که رابطه مطلوب را صدق می‌کند.

فرض کنیم که داریم: $\frac{h_1}{k_1}$ ، طوری که رابطه $\left| \xi - \frac{h}{k} \right| < \frac{1}{5k^2}$ را صدق می‌کند. بنابراین، $\left| \xi - \frac{h_1}{k_1} \right|$ مثبت بوده و می‌توانیم عدد n را طوری انتخاب نماییم که:

$$\begin{aligned} n > \frac{2}{\left| \xi - \frac{h_1}{k_1} \right|} &\Rightarrow n+1 > n > \frac{2}{\left| \xi - \frac{h_1}{k_1} \right|} \\ &\Rightarrow \frac{2}{n+1} < \left| \xi - \frac{h_1}{k_1} \right| \Rightarrow \left| \xi - \frac{h_1}{k_1} \right| > \frac{2}{n+1} \quad \dots \quad (**) \end{aligned}$$

از روابط (*) و (**) داریم که:

$$\left| \xi - \frac{h}{k} \right| < \frac{2}{n+1} < \left| \xi - \frac{h_1}{k_1} \right|$$

و این نشان می‌دهد که تعداد نامتناهی اعداد ناطق $\frac{h}{k}$ وجود دارد؛ طوری که رابطه ذیل را صدق می‌کند:

$$\left| \xi - \frac{h}{k} \right| < \frac{1}{5k^2}$$

برای عدد غیر ناطق ξ که نزدیک به عدد ناطق $\frac{h}{k}$ است.

نتیجه‌گیری

پس از مطالعه خواص ترادف‌های فری، می‌توان به چند نتیجه کلی دست یافت: خاصیت هم‌جواری و رابطه بین صورت و مخرج؛ یعنی در ترادف فری هرگاه دو کسر به عنوان کسرهای مجاور ظاهر گردند،

رابطه $bc - ad = 1$ صدق می‌نماید و اگر $\frac{a}{b}$ یک کسر فری مرتبه n باشد پس $\frac{b-a}{b}$ نیز یک کسر فری مرتبه n است. هیچ یک از دو کسر متعاقب در F_n مخرج‌های یک‌سان ندارند و حاصل جمع تمام کسرهای فری مرتبه n مساوی است به $\frac{1}{2} |F_n|$. نقش کسر میانه که برای ایجاد ترادف فری بسیار مهم است؛ یعنی اگر دو کسر متعاقب داشته باشیم، کسر $\frac{a+c}{b+d}$ در بین آن‌ها قرار می‌گیرد. روش‌های اثبات و کاربردهای آن: استفاده از الگوریتم اقلیدس، اثبات غیر مستقیم و استقراء در اثبات خواص ترادف فری، نه تنها دقت اثبات را افزایش می‌دهد؛ بلکه ارتباط بین نظریه‌ی اعداد و سایر شاخه‌های ریاضی؛ مانند هندسه و تحلیل را نیز به نمایش می‌گذارد.

پیامدهای ساختاری و تحلیلی

مطالعه ترادف‌های فری و خواص آن ما را به درک عمیقی از نظم پنهان در دنیای اعداد می‌رساند. این نظم علاوه بر کاربرد در مسایل ازدیدگاه نظری بسیار جذاب است. به‌طور خلاصه بررسی خواص ترادف‌های فری نشان می‌دهد که ترادف‌های فری دارای ساختار بسیار دقیق و متجانس هستند که روابط بین کسرهای نسبتاً اول را به‌طور منظم تعریف می‌نماید. این نتایج به عنوان یک پل ارتباطی میان نظریه‌ی اعداد و سایر حوزه‌های ریاضی عمل کرده است و دیدگاه جدیدی نسبت به رفتار اعداد ناطق ارائه می‌دهد.

سپاسگزاری

بنده از تمام کسانی که در مراحل مختلف نوشتن این مقاله مشوق و همراه بودند، به ویژه خانواده گرامی، صمیمانه سپاسگزاری می‌نماید. هم چنان از هیأت تحریر ژورنال ملی علوم طبیعی کابل برای فراهم‌سازی زمینه نشر این مقاله، صمیمانه تشکر می‌شود.

تضاد منافع

نویسنده اظهار می‌دارد که هیچ گونه تضاد منافی در ارتباط با این مقاله وجود ندارد.

- Ainsworth, J., Dawson, M., Pianta, J., & Warwick, J. (2012). The Farey sequences. *University of Edinburgh*. Link
- Alladi, K. (1975). A Farey sequence of Fibonacci numbers, *The Fibonacci Quarterly*, 13(1), 1-10. <http://doi.org/10.1112/S0217751X00013153>
- Andrews, G. E. (1994). *Number theory*. Courier Corporation. Inc. New York.
- Apostol, T. M. (1998). *Introduction to analytic number theory*. Springer Science & Business Media.
- Bagchi, S. (2024). Diophantine approximation using Farey sequences. *National High School Journal of Science*, 6(1), 1-12. Link
- Bak, P., Tang, C., & Wiesenfeld, K. (1987). Self-organized criticality: An explanation of 1/f noise. *Physical Review Letters*, 59(4), 381-384. <http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.59.381>
- Beck, M., & Robins, S. (2007). *Computing the continuous discretely: Integer-point enumeration in polyhedral*. Springer.
- Beiler, A. H. (1964). *Recreations in the theory of numbers*. Dover Publications.
- Brentjes, A. J. (1981). *Multidimensional continued fraction algorithms*. Mathematical Centre Tracts 145. Mathematisch Centrum.
- Burton, D. M. (2011). *Elementary number theory* (7th ed.) McGraw-Hill.
- Cauchy, A.-L. (1816). Demonstration d'un theoreme curieux sur les fractions. *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 9, 99-101. Link
- Das, S., Halder, K., Pratihari, S., & Bhowmick, P. (2015). Properties of Farey sequences and their applications to digital image processing. Link
- Farey, J. (1816). On a Curious property of vulgar fractions. *The Philosophical Magazine and Journal*, 47(217), 385-386. Link
- Fernstrom, R. (2017). Farey Fractions (U.U.D.M. Project Report 2017:24). Department of Mathematics, *Uppsala University*. Link
- Ford, L. R. (1938). Fraction. *American Mathematical Monthly*, 45(9), 586-601. Link
- Franke, J., & Landau, E. (1924). *Les suites de Farey et le probleme des nombres premiers*. Gottinger Nachrichten, 1924, 198-206.
- Graham, R. L., Knuth, D. E., & Patashnik, O. (1994). *Concrete mathematics: A Foundation for Computer Science*. Addison-Wesley.
- Hardy, G. H. & Wright, E. M. (2008). *An Introduction to the theory of numbers* (6thed.). Oxford University press.
- Kanemitsu, S., & Yoshimoto, M. (1996). Farey sequences and the Riemann hypothesis. *Acta Arithmetica*, 75(4), 351-375. <http://doi.org/10.4064/aa-75-4-351-374>

- Klein, F. (2010). *Elementary mathematics from an advanced standpoint: Geometry* (Dover reprint ed.) Dover Publications.
- Lagarias, J. C. (1995). The Farey series and the Riemann hypothesis. *Frontier in Number Theory, Physics, and Geometry* 1, 301-314.
<http://doi.org/10.2307/2695443>
- Leveque, W. J. (1996). *Fundamentals of number theory*. Dover Publications.
- Matveev, A. O. (2017). *Farey sequences: Duality and maps between subsequences*. De Gruyter. <http://doi.org/10.1515/9783110547665>
- Niven, I., Zuckerman, H. S. & Montgomery, H. L. (1991). *An Introduction to the theory of numbers*. John Wiley & Sons.
- Rosen, K.H. (2011). *Elementary Number theory and its applications* (6th ed.). Publisher.
- Sellke, M. (2017). *Farey sequence*. Retrieved from Link
- Smith, J. (2010). *Properties of Farey sequences and their applications*. [Master's thesis].
- Sukhoy, V., & Stoytchev, A. (2021). Formulas and Algorithms for the length of a Farey sequence. *Scientific Report*, 11(1), Article number: 22218.
<http://doi.org/10.1038/s41598-021-99545-w>
- Tamang, B. B., Sharma, S. R. K., Lawaju, S. D., & Singh, A. (2022). Some characteristics of the Farey sequences with Ford circles. *Nepal Journal of Mathematical Sciences*, 4(1), 69-76. <http://doi.org/10.3126/njmathsci.v4i1.53159>
- Tomas, R. (2014). From Farey sequences to Resonance diagrams. *Physical Review Special Topics-Accelerators and Beams*, 17(1), 014001.
<http://doi.org/10.1103/PhysRevSTAB.17.014001>
- Zukin, D. (2016). The Farey sequence and its Niche(s). *Journal of Mathematical Sciences*, 45(3), 112-125. Retrieved from Link.