



تحلیل مقایسوی روش‌های صریح رنگه-کوتا در حل معادلات دیفرانسیلی معمولی مرتبه اول

پوهنیار حزب الله رحیمی^۱، پوهنوال عبدالصمد رویش^۲، پوهنمل نویدالله هاشمی^۳

^{۱،۳}دپارتمنت الجبر، پوهنځی ریاضیات، پوهنتون کابل، کابل، افغانستان

^۲دپارتمنت فزیک، پوهنځی علوم طبیعی، پوهنتون بامیان، بامیان، افغانستان

ایمیل: hezbollah.rahimi@ku.edu.af

چکیده

این مطالعه به تحلیل و مقایسه روش‌های صریح رنگه-کوتا برای حل معادلات دیفرانسیلی خطی مرتبه اول پرداخته است. روش‌های مورد بررسی شامل اویلر فارورد، هیون و رنگه-کوتای مرتبه چهارم می‌باشند. روش تحقیق شامل تحلیل پایداری و مطالعه تقارب برای بررسی عملکرد این روش‌ها می‌باشد. نتایج نشان می‌دهند که روش رنگه-کوتای مرتبه چهارم به دلیل میزان تقارب بالا و نواحی پایداری وسیع‌تر، بهترین عملکرد را ارائه می‌دهد، در حالی که روش اویلر فارورد دارای محدودترین ناحیه پایداری و دقت پایین‌تر در تقارب است. روش هیون نیز عملکرد قابل قبولی در پایداری و تقارب داشته اما نسبت به روش رنگه-کوتای مرتبه چهارم ضعیف‌تر عمل کرده است. این مطالعه اهمیت ویژه‌ای در ارتقای فهم دقت و پایداری روش‌های عددی صریح برای حل مسائل دیفرانسیلی دارد و نشان می‌دهد که روش رنگه-کوتای مرتبه چهارم از لحاظ تقارب و پایداری برای مسائل مورد بررسی مفیدتر است.

واژه‌های کلیدی: پایداری؛ تقارب؛ روش عددی؛ روش‌های رنگه-کوتا؛ معادلات دیفرانسیلی

Comparative Analysis of Explicit Runge-Kutta Methods for Solving First-Order Linear Ordinary Differential Equations

Hezbollah Rahimi¹, Abdul Samad Royesh², Naweedullah Hashimi³

^{1,3}Department of Algebra, Faculty of Mathematics, Kabul University, Kabul, Afghanistan

²Department of Physics, Natural Sciences Faculty, Bamyán University, Bamyán, Afghanistan

Email: hezbollah.rahimi@ku.edu.af

Abstract

This study analyzes and compares the explicit Runge-Kutta methods for solving first-order linear differential equations. The methods examined include the Forward Euler method, Heun's method, and fourth-order Runge-Kutta method. The research methodology involved stability analysis and convergence studies to evaluate the performance of these methods. The results indicate that the fourth-order Runge-Kutta method offers the best performance because of its high convergence rate and wider stability regions, whereas the Forward Euler method has the smallest stability region and lower convergence accuracy. Heun's method also demonstrates satisfactory performance in terms of stability and convergence but is less effective compared to the fourth-order Runge-Kutta method. This study is particularly significant in enhancing the understanding of the accuracy and stability of explicit numerical methods for solving differential equations, showing that the fourth-order Runge-Kutta method is more efficient, in terms of both convergence and stability, for the problems under consideration.

Keywords: Convergence; Differential Equations; Numerical Methods; Runge-Kutta Methods; Stability

مقدمه

معادله دیفرانسیلی، معادله‌ای است که یک یا چند تابع را با مشتقات آن‌ها مرتبط می‌سازد (Biswas et al., 2023). این نوع معادلات به‌طور گسترده‌ای در مدل‌سازی سیستم‌های پیچیده به کار می‌روند؛ به خصوص در سیستم‌های مکانیکی و الکتریکی که در زمینه‌هایی چون بیولوژی، علوم اجتماعی، مهندسی و اقتصاد کاربرد دارند. سیستم‌های مکانیکی و الکتریکی، دو نمونه از سیستم‌های فیزیکی هستند که در آن‌ها تغییرات با گذشت زمان رخ می‌دهد (Aliyi Koroche, 2021a). معادلات دیفرانسیلی ابزارهای اساسی برای تحلیل ریاضیاتی تغییرات پیوسته این سیستم‌ها به شمار می‌آیند. در این راستا، معادلات دیفرانسیلی معمولی (ODEs) و معادلات دیفرانسیلی قسمی (PDEs) دو نوع اصلی از معادلات دیفرانسیلی هستند که در مدل‌سازی و تحلیل رفتار سیستم‌های فیزیکی به کار می‌روند. به‌طور خاص، معادلات دیفرانسیلی قسمی پارابولیک^۱ در مسائلی همچون انتقال حرارت در اجسام جامد کاربرد دارند. این معادلات به‌طور دقیق نحوه توزیع حرارت را نظر به زمان، مانند توزیع حرارت در یک میله، مدل‌سازی می‌کنند. همچنین، معادلات موج به‌منظور مدل‌سازی مسائل فیزیکی مورد استفاده قرار می‌گیرند، به خصوص در سیستم‌هایی که شامل حرکت‌های موجی هستند (Islam, 2015a). علاوه بر این، سیستم‌های مذکور پیچیده هستند و به گفته هوک، حل آن‌ها با استفاده از روش‌های تحلیلی امکان پذیر نمی‌باشند. به همین دلیل، روش‌های عددی به‌عنوان ابزار اصلی برای حل این نوع معادلات دیفرانسیلی مورد استفاده قرار می‌گیرند. این روش‌ها برای حل معادلات دیفرانسیلی که یافتن حل دقیق آن‌ها با روش‌های تحلیلی ممکن نیست، از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. روش‌های تحلیلی مانند روش جداسازی متغیرها قادرند حل‌های دقیق را برای معادلات دیفرانسیلی ساده مانند معادلات تفاضلی قسمی و معمولی فراهم کنند، در حالی که روش‌های عددی تنها می‌توانند تقریب‌هایی از حل دقیق به‌دست آورند. در این راستا، روش‌های عددی به‌عنوان ابزارهایی حیاتی برای حل مسائل پیچیده، به‌ویژه در زمینه‌های مهندسی و صنعت، شناخته می‌شوند. علاوه بر این، این روش‌ها در حل معادلات دیفرانسیلی مرتبط با پیش‌بینی‌های تغییرات اقلیمی نیز کاربرد دارند (Islam, 2015b). روش‌های عددی ممکن است صریح یا ضمنی باشند و در یک مرحله یا چندین مرحله محاسبه شوند. در روش‌های صریح، حل‌های عددی برای نقطه زمانی بعدی با استفاده از مقادیر عددی نقطه زمانی قبلی به‌دست می‌آیند. در حالی که در روش‌های ضمنی، یک تابع با استفاده از حل عددی نقطه زمانی بعدی که باید برای آن حل شود، محاسبه می‌شود.

^۱ Parabolic PDEs

روش‌های مختلفی برای حل معادلات دیفرانسیلی قسمی و معمولی وجود دارند (Zulkifli et al., 2022). یکی از این روش‌ها، روش خطوط است که برای به‌دست آوردن حل‌های عددی معادلات دیفرانسیلی قسمی پارابولیک و هایپربولیک به کار می‌رود. در این روش، معادلات دیفرانسیلی قسمی به یک سیستم معادلات دیفرانسیلی معمولی مرتبه اول تبدیل می‌شوند که به‌طور مؤثر معادلات دیفرانسیلی قسمی اصلی را می‌سازد. از سوی دیگر، روش‌های تفاضل محدود و حجم محدود از جمله روش‌های عددی مهمی هستند که برای تقریب مشتقات قسمی در معادلات دیفرانسیلی قسمی می‌شوند (Chauhan & Srivastava, 2019). روش‌های تفاضل محدود، به خصوص روش‌های رنگه-کوتا^۲، برای به‌دست آوردن حل‌های تقریبی مسائل مقدار اولیه معادلات دیفرانسیلی معمولی مرتبه اول بسیار حیاتی هستند (Paudel & Bhatt, n.d.). همچنین، روش‌های رنگه-کوتا با مرتبه بالا به دلیل دقت و پایداری بالای خود به‌طور گسترده‌ای برای حل معادلات دیفرانسیلی معمولی (ODEs) مورد استفاده قرار می‌گیرند (Biswas et al., 2023).

علاوه بر این، کارل رنگه و مارتین ویلهلم کوتا^۲ روش‌های رنگه-کوتا صریح و ضمنی را توسعه دادند (Bhardwaj, 2023). فرآیند توسعه این روش‌ها از مرتبه پایین به مرتبه بالا از سال ۱۸۹۵ آغاز شد. در آن سال، مارتین ویلهلم کوتا^۲ روش اوایلر فارورد را به مجموعه‌ای پیچیده‌تر از روش‌های رنگه-کوتا با دقت بالاتر گسترش داد. در همان سال، رنگه روش رنگه-کوتا مرتبه دوم را معرفی کرد (Ji & Zhou, 2018). در سال ۱۹۰۰، کارل هیون روش رنگه-کوتا مرتبه سوم را به جهان معرفی نمود. در سال ۱۹۰۱، کوتا^۲ روش‌های رنگه-کوتا مرتبه چهارم و پنجم را نیز ارائه کرد. در ادامه، فریتز یوهان نیستروم این روش‌ها را برای حل سیستم‌های معادلات دیفرانسیلی مرتبه دوم توسعه داد (Trofimets & Trofimets, 2020). در سال ۱۹۵۷، رابرت هنری مرسون مفهوم ترکیب روش‌های رنگه-کوتا از مرتبه‌های مختلف را مطرح کرد. در سال ۱۹۶۴، بوشر روش رنگه-کوتا مرتبه ششم با هفت مرحله را معرفی نمود. در سال ۱۹۶۸، روش رنگه-کوتا مرتبه هفتم با نه مرحله به‌عنوان یک روش معتبر شناخته شد و در سال ۱۹۷۰، روش رنگه-کوتا مرتبه هشتم با یازده مرحله توسط کورتیس معرفی گردید (Mechee et al., 2024).

روش‌های رنگه-کوتا در تحقیقات علمی همواره تحت بررسی و تحلیل قرار گرفته‌اند (Yousif, 2020) و در سال‌های اخیر، اکثر مقالات تحقیقاتی به توسعه روش‌های جدید رنگه-کوتا با مشتقات بالاتر

^۲ Runge-Kutta

پرداخته‌اند تا دقت بالاتری از این روش‌ها به دست آورند (Tadmor, 2023). در چندین مقاله، پژوهشگران به بررسی و مقایسه روش‌های رنگه-کوتا با مرتبه‌های پایین و بالا از منظر ویژگی‌های عددی، به‌ویژه دقت و پایداری، پرداخته‌اند.

ووسو^۳ مقاله‌یی در خصوص یک روش جدید رنگه-کوتا شامل مشتقات بالاتر منتشر کرده است. در این مقاله، روش رنگه-کوتا صریح با استفاده از چندین مشتق سه مرحله‌ای توسعه یافته که مشتقات مرتبه اول و دوم آن از طریق توسعه سلسله تیلور یک تابع به دست آمده‌اند. این مقاله، روش رنگه-کوتا صریح را از نظر پایداری مورد تحلیل قرار داده است (Al_Ameely & Albukhuttar, 2023). علاوه بر این، دو معادله دیفرانسیلی معمولی مرتبه اول را حل کرده‌اند تا دقت روش رنگه-کوتا صریح را با روش‌های هیون (Heun) و گوکن (Goeken) مقایسه نمایند. روش‌های هیون و گوکن نیز به‌عنوان روش‌های رنگه-کوتا صریح سه مرحله‌ای شناخته می‌شوند، اما مشتقات کمتری نسبت به روش رنگه-کوتا صریح دارند. همچنین، خطاهای مطلق برای حل عددی دو معادله دیفرانسیلی معمولی مرتبه اول با استفاده از روش‌های رنگه-کوتا صریح، هیون و گوکن در قدم‌های مختلف محاسبه شده است. خطای مطلق به عنوان تفاوت بین حل عددی و حل دقیق یک معادله دیفرانسیلی معمولی تعریف می‌شود. نتایج تحقیقات آن‌ها نشان داده است که خطاهای مطلق در روش‌های گوکن و رنگه-کوتا صریح به اندازه روش هیون افزایش نمی‌یابد. در نهایت، عملکرد روش رنگه-کوتا صریح نسبت به روش‌های هیون و گوکن بهتر بوده و این روش به‌عنوان پایدارترین و دقیق‌ترین روش سه مرحله‌ای در میان روش‌های رنگه-کوتا صریح شناخته شده است.

پاپادوپولوس^۴ و سیموس^۵ نیز یک روش رنگه-کوتا صریح توسعه داده‌اند که به نام روش رنگه-کوتا نیستروم مرتبه چهارم شناخته می‌شود. این روش شامل چهار ضریب متغیر اضافی نسبت به روش معمولی رنگه-کوتا مرتبه چهارم است. در تحقیق آن‌ها، از این روش برای حل معادله شرونینگر که یک معادله دیفرانسیلی معمولی مرتبه دوم است، استفاده شده است. نویسندگان دقت این روش رنگه-کوتا نیستروم مرتبه چهارم را با سه نوع دیگر از روش‌های رنگه-کوتا نیستروم مرتبه چهارم در حل معادله شرونینگر مقایسه کرده‌اند. نتایج تحقیقات آن‌ها نشان داده است که روش رنگه-کوتا نیستروم توسعه

^۳ Wusu

^۴ Papadopoulos

^۵ Simos

یافته مرتبه چهارم دقیق‌تر و کاراتر از سایر روش‌های رنگه-کوتا نیست و مرتبه چهارم است (Zhang et al., 2017).

یک مقاله تحقیقی دیگر درباره دقت و موثریت روش‌های رنگه-کوتا توسط حسن نگاشته شده است. در این مقاله، وی دقت و موثریت شش روش رنگه-کوتا را برای حل یک مسئله مقدار اولیه از یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول مورد بررسی قرار داده است: روش اوایلر فارورد، روش اوایلر بک وارد، روش هیون، روش رنگه-کوتای مرتبه چهارم، ODE23 و ODE45 وی با استفاده از این شش روش رنگه-کوتا و با اندازه‌های قدم متفاوت، حل عددی و حل دقیق مسئله مقدار اولیه را محاسبه کرده است. دقت و کارایی این روش‌ها با محاسبه میانگین خطاهای مطلق و زمان محاسبات مورد ارزیابی قرار گرفته‌اند. نتایج تحقیق نشان داده‌اند که ODE45 دقیق‌ترین روش رنگه-کوتا است و همچنین از نظر تعداد محاسبات تابع و زمان محاسبات نسبت به سایر روش‌های بررسی شده در این مقاله مؤثرتر می‌باشد (Kaur et al., 2024).

علاوه بر این، اسلام مقاله‌ای تحقیقی درباره روش اوایلر فارورد و روش رنگه-کوتای مرتبه چهارم برای یافتن حل‌های عددی دو معادله دیفرانسیل مرتبه اول با چهار اندازه قدم مختلف ارائه کرده است. وی دقت این دو روش رنگه-کوتای صریح را از طریق محاسبه حداکثر خطاها مقایسه کرده است. یکی دیگر از مقایسه‌های مطالعه شده توسط او، بررسی موثریت این دو روش رنگه-کوتای صریح از طریق ارزیابی سرعت تقارب حل عددی به حل دقیق بوده است. یافته‌های تحقیق نشان می‌دهند که روش رنگه-کوتای مرتبه چهارم از دقت بالاتری برخوردار است و حل عددی به‌دست آمده با این روش نسبت به روش اوایلر فارورد با سرعت بیشتری به حل دقیق متقارب می‌شود. همچنین، روش رنگه-کوتای مرتبه چهارم در محاسبه حل عددی معادلات دیفرانسیل مرتبه اول به‌طور مؤثرتری در مقایسه با روش اوایلر فارورد عمل کرده است (Workineh et al., 2024).

علاوه بر این، کچسون^۶ و احمدیه تأکید کرده‌اند که یافتن چندجمله‌ای‌های پایداری برای روش‌های رنگه-کوتای صریح در حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول از اهمیت بالایی برخوردار است. در تحقیق خود، آن‌ها رویکردی برای ساخت چندجمله‌ای‌های پایداری مرتبط با این معادلات ارائه کرده‌اند. نویسندگان همچنین نواحی پایداری روش‌های رنگه-کوتای صریح، از جمله روش رنگه-کوتای مرتبه چهارم، را مورد بررسی قرار داده و ترسیم کرده‌اند (Workineh et al., 2024).

^۶ Ketcheson

یک مقاله تحقیقی دیگر درباره نواحی پایداری توسط سکا و اسی ارائه شده است. در این مقاله، نویسندگان اثبات کرده‌اند که تحول نواحی پایداری به مرتبه روش‌های رنگه-کوتا وابسته نیست. آن‌ها این ادعا را از طریق تحلیل پایداری روش‌های رنگه-کوتای مرتبه اول، دوم، سوم و چهارم، همچنین روش رنگه-کوتای مرتبه هشتم با یازده مرحله، مورد بررسی قرار داده‌اند. علاوه بر این، نواحی پایداری روش‌های رنگه-کوتای مرتبه اول، دوم، سوم و چهارم با ناحیه پایداری روش رنگه-کوتای مرتبه هشتم مقایسه شده است. یافته‌های تحقیق آن‌ها نشان می‌دهد که اندازه نواحی پایداری روش‌های رنگه-کوتای مرتبه دوم، سوم و چهارم بزرگ‌تر از ناحیه پایداری روش رنگه-کوتای مرتبه هشتم است (Nupur et al., 2023).

در مقالات بررسی‌شده فوق، مشاهده می‌شود که بسیاری از پژوهشگران به‌طور گسترده بر تحلیل ویژگی‌های دقت، پایداری و موثریت روش‌های رنگه-کوتای صریح مرتبه پایین، نظیر روش اویلر فارورد و روش هیون، تمرکز داشته‌اند. با این حال، توجه پژوهشگران به ویژگی‌های دقت، پایداری و موثریت روش‌های رنگه-کوتای صریح مرتبه بالا، به‌ویژه روش‌های رنگه-کوتای مرتبه پنجم و هشتم، به‌طور قابل‌توجهی کمتر بوده است. در حقیقت، تحقیقات محدودی در زمینه تحلیل پایداری روش‌های رنگه-کوتای مرتبه بالا، به‌ویژه روش رنگه-کوتای مرتبه پنجم، صورت گرفته است. بنابراین، در این مطالعه، تحلیل پایداری و تقارب سه روش رنگه-کوتای صریح زیر ارائه می‌گردد: روش اویلر فارورد، روش هیون و روش رنگه-کوتای مرتبه چهارم.

در این مطالعه، دقت سه روش رنگه-کوتای صریح برای حل یک مسئله مقدار اولیه از یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول با بررسی میزان تقارب آن‌ها مورد مطالعه قرار می‌گیرد. به‌منظور ارزیابی اینکه کدام یک از این سه روش رنگه-کوتای صریح از ویژگی پایداری بهتری برای حل مسئله مقدار اولیه یک معادله خطی آزمایشی برخوردار است، تحلیل پایداری آن‌ها استخراج و بررسی خواهد شد. این مطالعه به‌طور عمده بر مقایسه ویژگی‌های موثریت سه روش رنگه-کوتای صریح متمرکز است تا به این پرسش تحقیقی پاسخ دهد:

کدام یک از این سه روش رنگه-کوتای صریح برای حل مسئله مقدار اولیه یک سیستم معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول کارآمدتر است؟

روش تحقیق

روش تحقیق این مطالعه از نوع کمی و مبتنی بر شبیه سازی عددی است. داده ها از طریق حل یک معادله دیفرانسیلی خطی ساده با حل دقیق، به صورت محاسبه شده و با استفاده از نرم افزار MATLAB تولید شده اند. واحد تحلیل شامل سه روش عددی صریح رنگه-کوتا (اوایلر فارورد، هیون و مرتبه چهارم) است. برای گردآوری داده ها، حل عددی معادله با اندازه گام های مختلف محاسبه و خطاها ثبت گردیده اند. روش نمونه گیری به صورت هدفمند و مبتنی بر انتخاب یک مسئله ریاضی استاندارد انجام شده است. به همین منظور، معادله (۱) برای تحلیل پایداری این روش ها انتخاب شده است، چرا که یک معادله دیفرانسیلی معمولی ساده از مرتبه اول می باشد که به گفته ی سودرلند (Soderlind, 2017)، معمولاً برای تحلیل پایداری انتخاب می شود تا بتوان آن را به صورت تحلیلی و با استفاده از قلم و کاغذ حل کرد. تحلیل داده ها شامل بررسی پایداری عددی از طریق استخراج تابع پایداری و ترسیم ناحیه آن در صفحه مختلط، و تحلیل دقت با محاسبه خطای برشی کلی و نرخ تقارب در مقیاس لگاریتمی است.

خاصیت پایداری

خاصیت پایداری روش های عددی نقشی اساسی را در حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول ایفا می کند. پایداری این روش ها را می توان با تحلیل رفتار آن ها برای حل یک معادله خطی آزمایشی مورد بررسی قرار داد.

در این بخش، تحلیل پایداری سه روش رنگه-کوتای صریح برای حل یک معادله خطی آزمایشی، ارائه می گردد (Suryaningrat et al., 2020a). این معادله بصورت زیر تعریف شده است:

$$y'(t) = -\lambda y(t) \quad (1)$$

در معادله فوق $y(0) = 1$ ، $t \in [0, T]$ و $\lambda \in \mathbb{C}$ است.

در اینجا معادله (۱) برای تحلیل پایداری سه روش رنگه-کوتای صریح انتخاب شده، زیرا این معادله دیفرانسیل مرتبه اول ساده بوده، و میتوان حل دقیق آن را بصورت تحلیلی نیز دریافت نمود.

حل دقیق و شناخته شده معادله (۱) طوری زیر ارائه می گردد:

$$y(t) = e^{-\lambda t} \quad (2)$$

حل دقیق معادله (۲) یک حل نمایی برای معادله (۱) است، این حل به صفر تقرب می کند زمانی که $t \rightarrow \infty$ و $\text{Re}(\lambda) > 0$ باشد. نماد $\text{Re}(\lambda) > 0$ قیمت های مثبت و حقیقی λ را روی محور حقیقی در سیستم مختصات مختلط نشان میدهد. سیستم مختصات مختلط همچنین شامل محور موهومی

(Im) است که اعداد مختلط $z = h\lambda$ روی آن نمایش داده میشود. یک روش عددی میتواند برای قیمت های مختلف $h\lambda$ پایدار باشد، که در اینجا h نشان دهنده اندازه قدم است. قیمت های مختلف $h\lambda$ در یک ناحیه محدود قرار می گیرند که به آن "ناحیه پایداری" گفته می شود و می توان آن را در سیستم مختصات مختلط نمایش داد. یک روش عددی زمانی پایدار محسوب می شود که شرط زیر صدق نماید:

$$|S(z)| < 1 \quad (3)$$

در رابطه فوق $S(z)$ تابع پایداری را نشان میدهد، و یک سلسله از توانهای z است که به منظور تقریب حل نمایی معادله خطی آزمایشی به کار می رود.

افزون بر این، در بخش های بعدی هر یک از روش های رنگه-کوتای صریح از نظر پایداری برای حل معادله (۱) مورد تحلیل قرار می گیرند. در این تحلیل، برای هر روش رنگه-کوتای صریح یک شرط پایداری استخراج می شود. سپس در بخش بعدی شرایط پایداری ترسیم می گردند تا نواحی پایداری سه روش رنگه-کوتای صریح در سیستم مختصات مختلط به تصویر کشیده شوند. در نهایت، نواحی پایداری با یکدیگر مقایسه می شوند تا مشخص شود کدام روش رنگه-کوتای صریح کوچک ترین و بزرگ ترین ناحیه پایداری را دارا است.

روش اوایلر فارورد

روش اوایلر فارورد یک روش رنگه-کوتای مرتبه اول است و به طور زیر تعریف می گردد:

$$y_j = y_{j-1} + hf(t_{j-1}, y_{j-1}) \quad (4)$$

روش اوایلر فارورد برای محاسبه حل عددی y_j در نقطه زمانی گسسته t_j به کار می رود. این روش یک روش رنگه-کوتای صریح یک-مرحله ای است، بدین معنا که برای محاسبه حل عددی در یک قدم زمانی، تنها به محاسبه یک تابع نیاز است.

اکنون می توانیم تحلیل پایداری روش اوایلر فارورد را برای حل معادله (۱) به طور زیر حاصل نماییم:

$$y_j = y_{j-1} + h(-\lambda y_{j-1})$$

$$y_j = (1 - h\lambda)y_{j-1}$$

در اینجا، y_j ، y_{j-1} حل های عددی و $1 - h\lambda$ یک ثابت است. علاوه بر این، رابطه زیر برقرار است:

$$\begin{aligned} y_{j-1} &= (1 - h\lambda)y_{j-2}, \\ y_{j-2} &= (1 - h\lambda)y_{j-3} \\ &\vdots \\ y_1 &= (1 - h\lambda)y_0 = (1 - h\lambda). \end{aligned}$$

در نتیجه، حل عددی زیر به دست می‌آید:

$$y_j = (1 - h\lambda)^j \quad (5)$$

حل عددی (۵) معادله (۱) که به روش اویلر فارورد به دست آمده است، پایدار است چون حل عددی (۵) به صفر متقارب می‌شود. این حل عددی در زمان t کاهش می‌یابد و قتیکه $j \rightarrow \infty$ ، برای به دست آوردن این شرط، لازم است که شرط پایداری زیر را در نظر بگیریم:

$$|1 - h\lambda| < 1 \quad (6)$$

شرط پایداری (۶) محدودیتی برای قیمت اندازه قدم h تعیین می‌کند. روش اویلر فارورد زمانی پایدار است که شرط پایداری (۶) را صدق کند. این شرط زمانی برقرار است که مقدار آن کمتر از ۱ باشد؛ بنابراین، می‌توانیم شرط پایداری را با حذف علامت قیمت مطلق ساده کرده و به شکل زیر بیان کنیم:

$$-1 < 1 - h\lambda < 1 \rightarrow 0 < h\lambda < 2 \rightarrow 0 < h < \frac{2}{\lambda}$$

روش اویلر فارورد برای حل معادله (۱) زمانی پایدار است که شرط پایداری $h < \frac{2}{\lambda}$ را برای $\lambda \in \mathbb{R}$ صدق نمایید. نامساوات $0 < h\lambda < 2$ زمانی برقرار است $\lambda > 0$.

اکنون می‌توانیم بررسی کنیم که چگونه حل عددی معادله (۱) برای قیمت‌های مختلف $h\lambda$ تغییر می‌کند. فرض کنید $h = 0.1$ ، $h = 2$ و $\lambda = 5$ باشد. اگر $h = 0.1$ و $\lambda = 5$ پس $h\lambda = 0.5$ و $h\lambda < 2$ ، که نشان می‌دهد روش اویلر فارورد پایدار است. می‌توانیم نتیجه بگیریم که روش اویلر فارورد زمانی پایدار است که $h < \frac{2}{\lambda}$ برای $\lambda \in \mathbb{R}$. اگر $h = 2$ و $\lambda = 5$ پس $h\lambda = 10$ و $h\lambda > 2$ ، بدین معنا که روش اویلر فارورد ناپایدار است، و در نتیجه حل عددی به سمت بی‌نهایت تقارب می‌کند.

علاوه بر این، روش اویلر فارورد تابع پایداری زیر را داراست:

$$S(h\lambda) = 1 - h\lambda$$

روش هیون

روش هیون یک روش رنگه-کوتای مرتبه دوم است و به شرح زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}y_j &= y_{j-1} + \frac{1}{2}h(k_1 + k_2) \\k_2 &= f(t_{j-1}, y_{j-1}) \\\lambda_2 &= f(t_{j-1} + h, y_{j-1} + hk_1)\end{aligned}$$

روش هیون یک روش رنگه-کوتای صریح دو مرحله‌ای است، بدین معنا که برای محاسبه حل عددی در یک قدم زمانی، نیاز به محاسبه دو تابع است. این روش در مقایسه با روش اوایلر فارورد، به محاسبه یک تابع اضافی نیازمند است.

اکنون می‌توانیم تحلیل پایداری روش هیون را برای حل معادله (۱) به شرح زیر حاصل نماییم:

$$\begin{aligned}k_1 &= (-\lambda)y_{j-1} \\k_2 &= \left(-\lambda + \frac{1}{2}h\lambda^2\right)y_{j-1} \\y_j &= \left(1 - h\lambda + \frac{1}{2}h^2\lambda^2\right)y_{j-1}\end{aligned}$$

در نتیجه، حل عددی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y_j = \left(1 - h\lambda + \frac{1}{2}h^2\lambda^2\right)^j \quad (۷)$$

حل عددی معادله (۷) با گذشت زمان t کاهش می‌یابد زمانی که $j \rightarrow \infty$. برای بدست آوردن این شرط، نیازمند شرایط پایداری زیر هستیم:

$$\left|1 - h\lambda + \frac{1}{2}h^2\lambda^2\right| < 1 \quad (۸)$$

اگر شرایط پایداری (۸) را با حذف قیمت مطلق ساده‌سازی کنیم، به دست می‌آوریم:

$$-1 < 1 - h\lambda + \frac{1}{2}h^2\lambda^2 < 1 \rightarrow 0 < h\lambda - \frac{1}{2}h^2\lambda^2 < 2 \rightarrow 0 < h\lambda < 2 \rightarrow 0 < h < \frac{2}{\lambda}$$

شرط پایداری برای روش هیون زمانی که $\lambda \in \mathbb{R}$ و $h > 0$ باشد، به صورت $h < \frac{2}{\lambda}$ حاصل می‌شود. این شرط پایداری مشابه با شرط پایداری روش اوایلر فارورد است. تابع پایداری برای روش هیون به صورت زیر می‌باشد:

$$S(h\lambda) = 1 - h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2$$

تابع پایداری برای روش اوایلر فارورد و روش هیون به یکدیگر مرتبط هستند، زیرا دو حد اول تابع پایداری روش هیون مشابه با جملات تابع پایداری روش اوایلر فارورد می‌باشد. تابع پایداری روش

هیون شامل سه حد است، در حالی که تابع پایداری روش اویلر فارورد تنها از دو حد تشکیل شده است.

روش رنگه-کوتا مرتبه چهارم

روش رنگه-کوتا مرتبه چهارم که به عنوان روش کلاسیک رنگه-کوتا نیز شناخته می شود، به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\begin{aligned}y_j &= y_{j-1} + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\k_1 &= f(t_{j-1}, y_{j-1}), \\k_2 &= f\left(t_{j-1} + \frac{1}{2}h, y_{j-1} + \frac{1}{2}hk_1\right), \\k_3 &= f\left(t_{j-1} + \frac{1}{2}h, y_{j-1} + \frac{1}{2}hk_2\right), \\k_4 &= f(t_{j-1} + h, y_{j-1} + hk_3).\end{aligned}$$

روش رنگه-کوتا مرتبه چهارم یک روش صریح چهار مرحله‌ای است، به این معنا که برای محاسبه حل عددی در یک قدم زمانی، نیاز به محاسبه چهار تابع می باشد. روش رنگه-کوتا مرتبه چهارم، نسبت به روش هیون نیاز به محاسبه دو تابع بیشتر دارد. اکنون می توانیم تحلیل پایداری این روش را برای حل معادله (۱) استخراج کرده و به نتیجه زیر دست یابیم:

$$\begin{aligned}k_1 &= (-\lambda)y_{j-1}, \\k_2 &= \left(-\lambda + \frac{1}{2}h\lambda^2\right)y_{j-1}, \\k_3 &= \left(-\lambda + \frac{1}{2}h\lambda^2 - \frac{1}{4}h\lambda^3\right)y_{j-1}, \\k_4 &= \left(-\lambda + h\lambda^2 - \frac{1}{2}h^2\lambda^3 + \frac{1}{4}h^3\lambda^4\right)y_{j-1}, \\y_j &= \left(1 - h\lambda + \frac{1}{2}h^2\lambda^2 - \frac{1}{6}h^3\lambda^3 + \frac{1}{24}h^4\lambda^4\right)y_{j-1}.\end{aligned}$$

در نتیجه، حل عددی به صورت زیر به دست می آید:

$$y_j = \left(1 - h\lambda + \frac{1}{2}h^2\lambda^2 - \frac{1}{6}h^3\lambda^3 + \frac{1}{24}h^4\lambda^4\right)^j \quad (9)$$

که با افزایش زمان t و $\infty \rightarrow z$ کاهش می‌یابد. برای به دست آوردن این شرط، نیاز به شرایط پایداری زیر است:

$$\left| 1 - h\lambda + \frac{1}{2}h^2\lambda^2 - \frac{1}{6}h^3\lambda^3 + \frac{1}{24}h^4\lambda^4 \right| < 1.$$

بعد از ساده کردن رابطه فوق تابع پایداری برای روش رنگه-کوتا مرتبه چهارم به صورت زیر حاصل میشود:

$$S(h\lambda) = 1 - h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2 - \frac{1}{6}(h\lambda)^3 + \frac{1}{24}(h\lambda)^4.$$

این تابع پایداری شامل پنج حد است، به این معناست که دو حد بیشتر از حدود تابع پایداری روش هیون دارد. سه حد اول این تابع پایداری همچنین با دو حد تابع پایداری روش هیون یکسان است.

یافته‌ها

در این مطالعه، عملکرد سه روش صریح عددی شامل روش اوایلر فارورد، روش هیون و روش رنگه-کوتای مرتبه چهارم از دو جنبه مورد بررسی قرار گرفت: تحلیل پایداری عددی و تحلیل میزان تقارب حل عددی به حل دقیق.

مقایسه نواحی پایداری

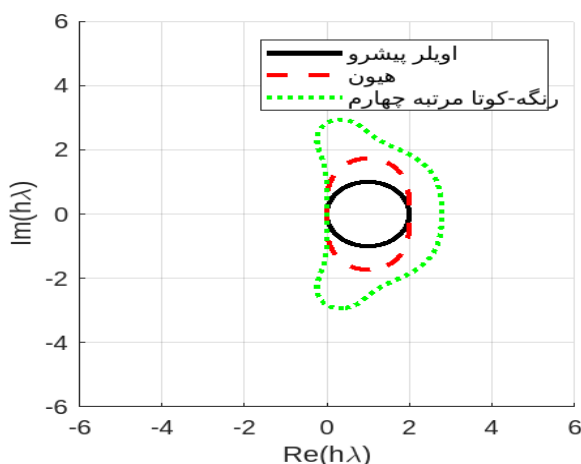
در این بخش، نواحی پایداری سه روش عددی صریح رنگه-کوتا (روش اوایلر فارورد، روش هیون و روش رنگه-کوتای مرتبه چهارم) بر اساس معادله خطی آزمایشی و با استفاده از نرم‌افزار MATLAB در صفحه مختلط $h\lambda$ ترسیم گردیدند.

در شکل ۱ مشاهده می‌شود که ناحیه پایداری روش اوایلر فارورد بصورت یک دایره با شعاع ۱ بوده و مرکز آن در نقطه $h\lambda = 1$ قرار دارد. ناحیه پایداری روش رنگه-کوتا مرتبه چهارم به شکل بُب‌گوش رسم شده. این سه روش رنگه-کوتای صریح در داخل نواحی پایداری خود، پایدار بوده و در بیرون از این نواحی ناپایدار هستند.

در شکل ۱ مشاهده می‌شود که سه روش رنگه-کوتای صریح روی محور حقیقی مثبت $Re(h\lambda)$ سیستم مختصات مختلط پایدار هستند. نواحی پایداری این روش‌ها در سمت راست مختصات مختلط قرار گرفته‌اند، زیرا این روش‌ها تنها برای قیمت‌های $Re(h\lambda) > 0$ در نواحی پایداری خود قرار دارند. همچنین مشاهده می‌شود که روش رنگه-کوتای مرتبه چهارم ناحیه پایداری بزرگ‌تری نسبت به روش اوایلر فارورد و روش هیون دارد. دلیل این موضوع آن است که با افزایش مرتبه

روش‌های رنگه-کوتای صریح، پایداری آن‌ها برای قیمت‌های بیشتری از $Re(h\lambda)$ گسترش یافته و نواحی پایداری آن‌ها بزرگ‌تر می‌شود.

این بدان معناست که روش رنگه-کوتای مرتبه چهارم نسبت به روش اویلر فارورد و روش هیون برای قیمت‌های بیشتری از $Re(h\lambda)$ پایداری بیشتری است. علاوه بر این، طبق گفته آتکینسون، روش‌های رنگه-کوتای صریح زمانی که اندازه قدم h بسیار کوچک باشد، نواحی پایداری بزرگتری به دست می‌آورند. برای اطمینان از پایداری روش‌های عددی، مقدار h باید به گونه‌ای تنظیم شود که $Re(h\lambda)$ در ناحیه پایداری قرار گیرد. روش عددی با وسیع‌ترین ناحیه پایداری، پایداری بیشتری است. بنابراین، روش رنگه-کوتای مرتبه چهارم به عنوان پایدارترین روش در میان این سه روش رنگه-کوتای صریح شناخته می‌شود، زیرا بزرگترین ناحیه پایداری را دارد. در مقابل، روش اویلر فارورد به دلیل داشتن کوچک‌ترین ناحیه پایداری، پایداری کمتری نسبت به روش‌های هیون و رنگه-کوتای مرتبه چهارم دارد.



شکل ۱: ناحیه پایداری سه روش رنگه-کوتا

بنابراین، بر اساس ترسیم‌های عددی، هر سه روش در ناحیه مختص مربوطه پایدار هستند، اما ناحیه پایداری آن‌ها از نظر وسعت متفاوت است. روش اویلر فارورد کوچک‌ترین ناحیه پایداری و روش رنگه-کوتای مرتبه چهارم بزرگ‌ترین ناحیه پایداری را در بین این سه روش داراست.

آزمایش‌های عددی

برای بررسی عملکرد سه روش عددی صریح رنگه-کوتا (روش اویلر فارورد، روش هیون و روش رنگه-کوتای مرتبه چهارم)، مطالعه‌ای عددی بر پایه‌ی حل یک معادله دیفرانسیلی خطی مرتبه اول صورت

گرفته است. هدف این آزمایش‌ها، ارزیابی دقت و میزان تقارب روش‌ها در تقریب حل دقیق معادله مورد نظر است.

مطالعه تقارب

معادله مقدار اولیه انتخاب شده برای این مطالعه به صورت زیر تعریف شده است:

$$y'(t) = -2ty(t) \quad (10)$$

در اینجا $y(0) = 1$ و $t \in [0, T]$ است.

معادله (۱۰) برای این مطالعه انتخاب شده است، زیرا یک مسئله مقدار اولیه ساده با یک حل دقیق و شناخته شده است. این ویژگی به ما امکان می‌دهد تا خطای قطع کلی را در زمان نهایی T محاسبه کنیم.

حل دقیق معادله فوق بصورت ذیل است:

$$y(t) = e^{-t^2}$$

در این مطالعه، میزان تقارب p با در نظر داشت سه مرحله مورد بررسی قرار گرفته. در مرحله اول، برای دریافت حل عددی y_n^h برای معادله (۱۰) با اندازه قدم h ، قیمت‌های h ، $\frac{h}{2}$ ، $\frac{h}{4}$ و $\frac{h}{8}$ انتخاب شده‌اند که به نسبت ۲ کاهش می‌یابند. این رویکرد، مطابق با توصیه لویک (Vena Yurinda Saragih et al., 2024)، یک روش رایج برای کاهش اندازه قدم h است تا به دقت بالاتری در حل‌های عددی دست یابیم. با این حال، استفاده از سایر مقادیر نیز امکان‌پذیر است. در مرحله دوم، خطای کلی برشی، در زمان نهایی T طوری ذیل محاسبه می‌کنیم.

$$e^h = |y_n^h - y(t_n)| \quad (11)$$

خطای کلی برشی e^h با اندازه قدم h تفاوت میان حل عددی y_n^h و حل دقیق $y(t_n)$ را نشان می‌دهد. در مرحله سوم، هدف این است که میزان تقارب p را با استفاده از محاسبه سه تقریب از میزان تقارب p از معادله (۱) تخمین بزنیم.

ما معادله (۱۰) را با استفاده از روش‌های اویلر فارورد، هیون و رنگه-کوتا مرتبه چهارم در انتروال زمانی $t \in [0, T]$ ، که در آن $T = 1$ است و با اندازه قدم‌های $h = 0.1$ ، $\frac{h}{2}$ ، $\frac{h}{4}$ و $\frac{h}{8}$ حل می‌کنیم. نتایج بدست آمده از حل معادله (۱۰) با سه روش رنگه-کوتا و قدم‌های مختلف در جداول زیر ترتیب شده است.

جدول ۱: خطاهای برش کلی و تخمین میزان تقارب روش اوایلر فارورد برای حل معادله $y'(t) = -2ty(t)$ با شرایط اولیه $y(0) = 1$ ، در انتروال زمانی $t \in [0,1]$.

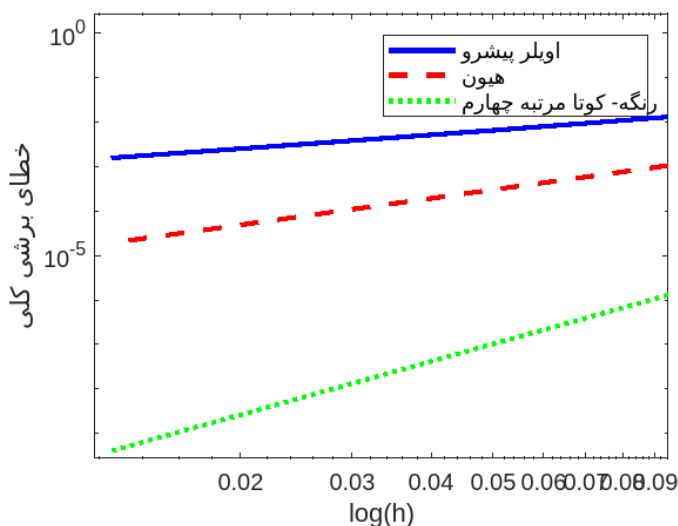
h	خطاهای برشی کلی	تقریب‌های میزان تقارب
0.1	1.3827×10^{-2}	—
0.05	6.5045×10^{-3}	≈ 1.0880
0.025	3.1569×10^{-3}	≈ 1.0430
0.0125	1.5554×10^{-3}	≈ 1.0210

جدول ۲: خطاهای برش کلی و تخمین میزان تقارب روش هیون برای حل معادله $y'(t) = -2ty(t)$ با شرایط اولیه $y(0) = 1$ ، در انتروال زمانی $t \in [0,1]$.

h	خطاهای برشی کلی	تقریب‌های میزان تقارب
0.1	1.1739×10^{-3}	—
0.05	3.0109×10^{-4}	≈ 1.9630
0.025	7.6014×10^{-5}	≈ 1.9860
0.0125	1.9085×10^{-5}	≈ 1.9940

جدول ۳: خطاهای برش کلی و تخمین میزان تقارب روش رنگه-کوتا مرتبه چهارم برای حل معادله $y'(t) = -2ty(t)$ با شرایط اولیه $y(0) = 1$ ، در انتروال زمانی $t \in [0,1]$.

h	خطاهای برشی کلی	تقریب‌های میزان تقارب
0.1	1.6252×10^{-6}	—
0.05	1.0253×10^{-7}	≈ 3.9860
0.025	6.4067×10^{-9}	≈ 4.0000
0.0125	3.9993×10^{-10}	≈ 4.0020



شکل ۲: خطاهای برشی کلی در حل عددی معادله $y'(t) = -2ty(t)$ ، با شرایط اولیه $y(0) = 1$ و انتروال زمانی $t \in [0, 1]$ ، با استفاده از سه روش صریح رنگه-کوتا با اندازه قدم های h در مقیاس لوگاریتمی با قاعده ۱۰.

بحث و مناقشه

هدف اصلی این تحقیق، مقایسه دقت و پایداری سه روش صریح رنگه-کوتا در حل معادلات دیفرانسیلی معمولی مرتبه اول بود. یافته‌های حاصل از جدول‌های ۱ تا ۳ نشان می‌دهند که کاهش اندازه گام h موجب کاهش سیستماتیک خطای برشی کلی در هر سه روش مورد بررسی شده است. این کاهش با ضریبی تقریباً معادل 2^p در هر مرحله انجام گرفته که به وضوح با مرتبه تقارب نظری هر روش هم‌خوانی دارد.

بر اساس نظریه های لوویک (Lee et al., 2020)، اگر خطاهای کلی برشی با ضریبی از 2^p کاهش یابند، برای روش اوایلر فارورد که دارای دقت مرتبه اول و $p = 1$ است، خطاهای کلی برشی با ضریبی از ۲ کاهش خواهند یافت، زیرا $2^1 = 2$. این بدین معناست که انتظار می‌رود سه روش رنگه-کوتا صریح نیز با ضریبی از 2^p کاهش پیدا کنند. اکنون می‌توانیم بررسی کنیم که آیا خطاهای کلی برشی در جدول‌های ۱ تا ۳ با این ضریب کاهش می‌یابند یا خیر.

در جدول ۱، برای روش اوایلر فارورد، که دارای دقت مرتبه اول است، مشاهده شد که خطا با ضریبی حدود ۲ کاهش می‌یابد. برای مثال، با کاهش اندازه گام از ۰٫۱ به ۰٫۰۵، نسبت خطاها به صورت تقریبی برابر با ۲٫۱۳ به دست آمد:

$$\frac{1.3827 \times 10^{-2}}{6.5045 \times 10^{-3}} \approx 2.1260$$

این نتیجه تأیید می‌کند که روش اوایلر فارورد دارای تقارب خطی به فرم $O(h)$ است که با مشاهدات بصری از شکل ۲ نیز مطابقت دارد، جایی که میل خط در مقیاس لگاریتمی برابر با ۱ است.

در جدول ۲، روش هیون که دارای مرتبه دقت دوم است، کاهش خطا با ضریبی نزدیک به ۴ را نشان می‌دهد. مقدار تقریبی ۳٫۹۰ برای نسبت بین دو خطای متوالی ثبت شده است:

$$\frac{1.1739 \times 10^{-3}}{3.0109 \times 10^{-4}} \approx 3.8988$$

مطابق با آن، تقارب این روش به فرم $O(h^2)$ است، که با میل خط برابر با ۲ در شکل ۲ مطابقت می‌کند.

در جدول ۳، روش رنگه-کوتای مرتبه چهارم کاهش خطا با ضریبی در حدود ۱۶ را نشان می‌دهد:

$$\frac{1.6252 \times 10^{-6}}{1.0253 \times 10^{-7}} \approx 15.851$$

این میزان کاهش با دقت مرتبه چهارم روش یعنی $O(h^4)$ مطابقت دارد و مطابق پیش‌بینی‌های تئوریک ارائه‌شده در آثار آتکینسون و همکاران است (Atkinson, 1989, p. 110).

گراف شکل ۲ نیز یافته‌های عددی را به‌خوبی تأیید می‌کند. در این شکل، که خطاها در مقیاس لگاریتمی برحسب اندازه‌گام h ترسیم شده‌اند، میل هر خط با مرتبه دقت متناظر با آن روش مطابقت دارد: میل ۱ برای اویلر، ۲ برای هیون، و ۴ برای روش رنگه-کوتای مرتبه چهارم. این شکل به‌وضوح روند کاهش خطا با افزایش دقت روش را نشان می‌دهد.

نتایج این تحقیق با یافته‌های مطالعات پیشین هم‌راستا هستند. برای نمونه، کوروشه (Aliyi Koroche, 2021b) و اشچر (Stephen et al., 2024) نیز کاهش خطا با نرخ‌های مشابه برای این سه روش انجام داده‌اند. همچنین، در تحقیق ساریگ (Vena Yurinda Saragih et al., 2024) کاهش سیستماتیک خطا با نصف شدن اندازه‌گام برای ارزیابی دقت روش‌های عددی توصیه شده است، که در این مطالعه نیز از آن تبعیت شده است.

در نهایت، مقایسه نتایج نشان می‌دهد که روش رنگه-کوتای مرتبه چهارم نه‌تنها دقیق‌تر است، بلکه با سرعت بیشتری به حل دقیق متقارب می‌شود. این روش در تمام اندازه‌گام‌ها دارای کوچک‌ترین خطای برشی کلی بوده و با توجه به ناحیه پایداری وسیع‌تری که در بخش یافته‌ها بررسی شد، از پایداری عددی بالاتری نیز برخوردار است. در مقابل، روش اویلر فارورد بیشترین خطای نسبی را در بین سه روش داراست و کم‌دقیق‌ترین روش محسوب می‌شود.

از جمله محدودیت‌های این مطالعه می‌توان به موارد زیر اشاره کرد: نخست، برای انجام مطالعه تقارب، نیاز به تغییرات در گدهای MATLAB (مانند تنظیم اندازه‌گام و زمان نهایی) وجود داشت که این امر قابلیت تعمیم و بازتولید نتایج را با چالش مواجه می‌سازد. دوم، کمبود منابع تحقیقی پیشین در زمینه تحلیل پایداری و تقارب روش‌های صریح با مرتبه بالا مانند RK5 و RK8 هنگام حل سیستم‌های معادلات دیفرانسیلی معمولی باعث شد بسیاری از نتایج این تحقیق بدون پشتوانه‌ی مقایسه‌ای باقی بماند. سوم، تمرکز مطالعه فقط بر معادلات خطی ساده مانند معادله‌ی آزمایشی (۱) و یک سیستم خاص از معادلات دیفرانسیلی خطی از مرتبه اول است که با وجود سادگی و امکان تحلیل دقیق، قابلیت تعمیم نتایج به سیستم‌های پیچیده‌تر یا غیرخطی را محدود می‌سازد. چهارم، در این تحقیق صرفاً روش‌های صریح مورد بررسی قرار گرفته‌اند و هیچ‌گونه تحلیل یا مقایسه‌ای با

روش‌های ضمنی که معمولاً در مسائل سفت (stiff) کاربرد دارند، انجام نشده است. در نهایت، انتخاب معادله‌ی ساده‌ی (۱) برای تحلیل پایداری، با وجود اینکه طبق نظر سودرلند برای حل تحلیلی مناسب است، ولی نمی‌تواند نماینده‌ی چالش‌های موجود در سیستم‌های پیچیده‌ی واقعی باشد.

نتیجه‌گیری

یافته‌های این تحقیق نشان می‌دهد که انتخاب روش مناسب در حل عددی معادلات دیفرانسیلی معمولی مرتبه اول، تأثیر مستقیمی بر دقت و پایداری نتایج دارد. تحلیل‌های صورت‌گرفته پیرامون پایداری عددی و میزان تقارب سه روش صریح رنگه-کوتا حاکی از آن است که روش رنگه-کوتای مرتبه چهارم (RK4) در مقایسه با روش اویلر فارورد و روش هیون، دارای بیشترین ناحیه پایداری و بالاترین مرتبه دقت می‌باشد. این ویژگی، این روش را به گزینه‌ای مناسب برای حل مسائل مقدار اولیه با حساسیت بالا نسبت به خطا و ناپایداری تبدیل کرده است.

از منظر علمی، این تحقیق با فراهم کردن شواهد تجربی بر مبنای شبیه‌سازی عددی و تحلیل نظری، درک بهتری از رفتار عددی روش‌های صریح رنگه-کوتا در حل معادلات دیفرانسیلی ارائه می‌دهد. همچنین نتایج حاصل می‌تواند در بهینه‌سازی الگوریتم‌های عددی مورد استفاده در نرم‌افزارهای محاسباتی؛ مانند MATLAB، به‌ویژه در مسائل مهندسی، فیزیکی و دینامیک سیالات، کاربرد داشته باشد.

از لحاظ توسعه آینده، پیشنهاد می‌شود این مقایسه در مورد روش‌های رنگه-کوتای مرتبه بالا (پنجم تا هشتم) نیز انجام شود تا کارایی آن‌ها در شرایط پیچیده‌تر بررسی گردد. همچنین، تحلیل پایداری این روش‌ها برای معادلات سخت‌تر یا معادلات دیفرانسیلی سفت (Stiff ODEs) می‌تواند زمینه‌ای برای پژوهش‌های آینده فراهم آورد.

در مجموع، این مطالعه گامی در جهت تبیین و ارزیابی دقیق روش‌های عددی صریح برای حل معادلات دیفرانسیلی است و می‌تواند مرجع مفیدی برای محققین و دانشجویان در حوزه ریاضیات کاربردی، فیزیک محاسباتی و مهندسی عددی باشد.

سپاسگزاری

نویسندگان از تمامی افرادی که در انجام این تحقیق همکاری داشته‌اند، به‌ویژه پوهنمل خالد ستوری، صمیمانه سپاسگزاری می‌نمایند.

سهم نویسندگان

پوهنیار حزب‌الله رحیمی مسوول اصلی در تمامی مراحل تحقیق بوده است؛ از جمله طراحی مفهومی، تدوین روش تحقیق، انجام شبیه‌سازی‌های عددی، تحلیل پایداری و تقارب و نگارش نسخه اولیه و نهایی مقاله.

پوهنمل نویدالله هاشمی در بازبینی علمی متن، ارائه پیشنهادات برای بهبود ساختار نظری تحقیق و بررسی دقت محاسبات نقش داشته است.

پوهنوال عبدالصمد رویش در ارزیابی نتایج، مرور بخش‌های تحلیل پایداری و اصلاحات نهایی متن مقاله همکاری داشته است.

تضاد منافع

نویسندگان اظهار می‌دارند که در رابطه به این مقاله هیچ‌گونه تضاد منافع وجود ندارد.

- Ji, X., & Zhou, J. (2018). Solving High-Order Uncertain Differential Equations via Runge–Kutta Method. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 26(3), 1379–1386. <https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2017.2723350>
- Al Ameen, A., & Albukhuttar, A. (2023). Solving system of Euler's equations using Runge–Kutta methods. *Journal of University of Anbar for Pure Science*, 17(2), 265–268. <https://doi.org/10.37652/juaps.2023.181576>
- Aliyi Koroche, K. (2021a). Numerical Solution of First Order Ordinary Differential Equation by Using Runge-Kutta Method. *International Journal of Systems Science and Applied Mathematics*, 6(1), 1. <https://doi.org/10.11648/j.ijssam.20210601.11>
- Aliyi Koroche, K. (2021b). Numerical Solution of First Order Ordinary Differential Equation by Using Runge-Kutta Method. *International Journal of Systems Science and Applied Mathematics*, 6(1), 1. <https://doi.org/10.11648/j.ijssam.20210601.11>
- Biswas, A., Ketcheson, D. I., Roberts, S., Seibold, B., & Shirokoff, D. (2023). Explicit Runge–Kutta methods that alleviate order reduction [Preprint]. *arXiv*. <https://arxiv.org/abs/2310.02817>
- Chauhan, V., & Srivastava, P. K. (2019). Computational techniques based on runge-kutta method of various order and type for solving differential equations. *International Journal of Mathematical, Engineering and Management Sciences*, 4(2), 375–386. <https://doi.org/10.33889/ijmems.2019.4.2-030>
- Islam, Md. A. (2015a). A Comparative Study on Numerical Solutions of Initial Value Problems (IVP) for Ordinary Differential Equations (ODE) with Euler and Runge Kutta Methods. *American Journal of Computational Mathematics*, 05(03), 393–404. <https://doi.org/10.4236/ajcm.2015.53034>
- Islam, Md. A. (2015b). A Comparative Study on Numerical Solutions of Initial Value Problems (IVP) for Ordinary Differential Equations (ODE) with Euler and Runge Kutta Methods. *American Journal of Computational Mathematics*, 05(03), 393–404. <https://doi.org/10.4236/ajcm.2015.53034>
- Kaur, M., Bhatti, J., Kumar, S., & Thota, S. (2024). Explicit Runge-Kutta Method for Evaluating Ordinary Differential Equations of type $v' = f(u, v, v')$. *WSEAS Transactions on Mathematics*, 23, 167–175. <https://doi.org/10.37394/23206.2024.23.20>
- Kumar, I., & Bhardwaj, R. (2023). Numerical simulation of ordinary differential equation by Euler and Runge–Kutta technique. *Journal of Electronics, Computer Networking and Applied Mathematics*, 36, 8–17. <https://doi.org/10.55529/jecnam.36.8.17>
- Lee, K. C., Senu, N., Ahmadian, A., Ibrahim, S. N. I., & Baleanu, D. (2020). Numerical study of third-order ordinary differential equations using a new class of two derivative Runge-Kutta type methods. *Alexandria Engineering Journal*, 59(4), 2449–2467. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2020.03.008>
- Mechee, M. S., Fawzi, F. A., & Abdullah, S. M. (2024). Construction of Numerical RKM-Method for Solving a Class of Twelves-Order Ordinary Differential

- Equations. *Iraqi Journal of Science*, 65(4), 2074–2086.
<https://doi.org/10.24996/ijcs.2024.65.4.25>
- Nupur, S., Akter, R., Tamanna, T. R., & Akter, P. (2023). Maximizing Accuracy: Advancements in Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. *Journal of Electronics, Computer Networking and Applied Mathematics*, 35, 18–27.
<https://doi.org/10.55529/jecnam.35.18.27>
- Paudel, D. R., & Bhatt, M. R. (n.d.). Comparative study of Euler's method and Runge-Kutta method to solve an ordinary differential equation through a computational approach. *Academic Journal of Mathematics Education*, 6–7.
<https://www.intmath.com/>
- Stephen, O. A., Adebowale, A. M., Senapon, W. A., Tolulope, K. M., & Jamiu, A. R. (2024). Comparative Analysis of Some New Runge-Kutta Type Techniques on the Solution of First Order Initial Value Problem in Ordinary Differential Equations. *International Journal of Scientific Advances*, 5(3).
<https://doi.org/10.51542/ijscia.v5i3.5>
- Suryaningrat, W., Ashgi, R., & Purwani, S. (2020a). Order Runge-Kutta with Extended Formulation for Solving Ordinary Differential Equations. *International Journal of Global Operations Research*, 1(4), 160–167.
<http://www.iorajournal.org/index.php/ijgor/index>
- Suryaningrat, W., Ashgi, R., & Purwani, S. (2020b). Order Runge-Kutta with Extended Formulation for Solving Ordinary Differential Equations. *International Journal of Global Operations Research*, 1(4), 160–167.
<http://www.iorajournal.org/index.php/ijgor/index>
- Ogunrinde, R. B. (2012). On Some Numerical Methods for Solving Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations. *IOSR Journal of Mathematics*, 1(3), 25–31. <https://doi.org/10.9790/5728-0132531>
- Trofimets, E. N., & Trofimets, V. Y. (2020). Research of numerical methods for solving ordinary differential equations in MS Excel. *Journal of Physics: Conference Series*, 1691(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1691/1/012049>
- Vena Yurinda Saragih, Giovani Br Surbakti, Nia Elovani Br Munthe, & Syabila Amalia Wardani. (2024). Implementasi Metode Runge-Kutta dalam Simulasi Lintasan Peluru pada Medan Gravitasi Bumi. *Bilangan : Jurnal Ilmiah Matematika, Kebumihan Dan Angkasa*, 2(5), 41–50. <https://doi.org/10.62383/bilangan.v2i5.272>
- Workineh, Y., Mekonnen, H., & Belew, B. (2024). Numerical methods for solving second-order initial value problems of ordinary differential equations with Euler and Runge-Kutta fourth-order methods. *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics*, 10. <https://doi.org/10.3389/fams.2024.1360628>
- Yousif, M. (2020). Article 3 Part of the Ordinary Differential Equations and Applied Dynamics Commons Recommended Citation Recommended Citation yousif. In *Emirates Journal for Engineering Research* (Vol. 25).
<https://scholarworks.uaeu.ac.ae/ejerAvailableat:https://scholarworks.uaeu.ac.ae/ejer/vol25/iss3/3>

- Zhang, L., Zhang, X., & Guan, T. (2017). Numerical Calculation Methods and Computer Implementation of Ordinary Differential Equation Initial Value Problem. 440–443. <https://doi.org/10.2991/FMSMT-17.2017.93>
- Zulkifli, N. S., Samsudin, N., & Yusof, N. M. M. (2022). Improving Euler Method using Centroidal-Polygon Scheme for Better Accuracy in Resistor-Capacitor Circuit Equation. *Journal of Physics: Conference Series*, 2319(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2319/1/012023>

ضمیمه

این ضمیمه شامل تمام اسکریپت‌هایی از کدهای MATLAB است که در این مقاله استفاده شده اند.

Script 1 - Stability Regions of Explicit Runge-Kutta Methods

% This script plots the stability regions of three explicit Runge-Kutta methods
% in the complex plane: Forward Euler, Heun and RK4.

close all

clear all

clf, hold on

% Create a grid in the complex plane

[X, Y] = meshgrid(-6:0.01:6, -6:0.01:6);

Z = X + 1i*Y; % Complex number $Z = x + i*y$

% Define the stability functions (modulus of amplification factors)

R1 = abs(1 - Z); % Forward Euler

R2 = abs(1 - Z + (1/2)*Z.^2); % Heun

R3 = abs(1 - Z + (1/2)*Z.^2 - (1/6)*Z.^3 + (1/24)*Z.^4); % RK4

% Plot the stability boundaries where $|R| = 1$

contour(X, Y, R1, [1,1], 'k', 'LineWidth', 2); % Forward Euler - Black

contour(X, Y, R2, [1,1], 'r', 'LineWidth', 2); % Heun - Red

contour(X, Y, R3, [1,1], 'g', 'LineWidth', 2); % RK4 - Green

% Labels and formatting

title('Stability region of Forward Euler, Heun, RK4')

legend('Forward Euler','Heun','RK4')

xlabel('Re(h\lambda)')

ylabel('Im(h\lambda)')

axis square

grid on

Script 2 - Definition of First-Order ODE

function dy = fun (t, y)

dy = -2 * t * y;

end

% t is the independent time variable.

% y is the dependent variable.

Script 3 – Estimated Convergence Rate (Forward Euler Method)

% Script 3 - Estimated Convergence Rate of Forward Euler Method

% This solver attempts to compute three approximations

% of the convergence rate of the forward Euler method

% with the step sizes $h=0.1$, $h/2$, $h/4$ and $h/8$.

```

format long          % A format function to get 15 digits.
t0 = 0;              % Initial time.
t(1) = 1;            % Final time.
h = 0.1;              % Step size h.
n = (t(1)-t0)/h;      % n is the number of time steps.
t = t0:h:t(1)-h;      % t is the time interval.
y0 = 1;              % Initial condition.
y(1) = y0;            % The numerical solution at the final time.
% Use the forward Euler method to find the numerical
% solution at y(1) which is the next time step after
% the initial value y0.
% The for loop is repetition of a number amount of times.
% for i reads for index i which starts from 1 to n.
for i = 1:n           % Time stepping loop
    y(i+1) = y(i) + h * fun(t(i), y(i));
end
% Exact solution.
yExact = exp(-(1)^2);
% Global truncation error at the final time t = 1.
Error = abs(y(i+1) - yExact);
% Estimated convergence rate examples:
% ((log(0.013827239387109 / 0.006504577699395)) / log(2)) = 1.087985850558898
% ((log(0.006504577699395 / 0.003156961521126)) / log(2)) = 1.042918718670773
% ((log(0.003156961521126 / 0.001555416487666)) / log(2)) = 1.021235739577236

```

Script 4 - Heun's Method Convergence Rate

```

% This solver attempts to compute three approximations
% of the convergence rate of Heun's method
% with the step sizes h=0.1, h/2, h/4 and h/8.

format long

t0 = 0;

t (1) = 1;

h = 0.1;

n = (t(1)-t0)/h;

t = t0:h:t (1)-h;

y0 = 1;

y (1) = y0;

% Use Heun's method.

```



```
for i = 1: n
    k1 = fun(t(i), y(i));
    k2 = fun(t(i)+h,y(i)+h*k1);
    y(i+1) = y(i)+(1/2) *h*(k1+k2);
end
% Exact solution.
yExact = exp -(1) ^2)
% Global truncation error.
Error = abs(y(i+1)-yExact)
% Estimated convergence rate.
% ((log (0.001173953098629/3.010909612657375e-04))/log (2)) =
1.963103467343805
% ((log (3.010909612657375e-04/7.601465913853467e-05))/log (2)) =
1.985849830323583
% ((log (7.601465913853467e-05/1.908536287215101e-05))/log (2)) =
1.993811046712535
```

Script 5 - RK4 Method Convergence Rate

```
% This solver attempts to compute three approximations
% of the convergence rate of RK4 with the step sizes
% h=0.1, h/2, h/4 and h/8.
format long
t0 = 0;
t (1) = 1;
h = 0.1;
n = (t(1)-t0)/h;
t = t0:h:t (1)-h;
y0 = 1;
y (1) = y0;
% Use RK4.
for i = 1: n
```

```

k1 = fun(t(i), y(i));
k2 = fun(t(i)+(1/2) *h,y(i)+(1/2) *h*k1);
k3 = fun(t(i)+(1/2) *h,y(i)+(1/2) *h*k2);
k4 = fun(t(i)+h,y(i)+h*k3);
y(i+1) = y(i)+(1/6) *h*(k1+2*k2+2*k3+k4);
end

% Exact solution.
yExact = exp (-(1) ^2)

% Global truncation error.
Error = abs(y(i+1)-yExact)

% Estimated convergence rate.
% ((log (1.625254322568104e-06/1.025354282591096e-07))/log (2)) =
3.986471107147980
% ((log (1.025354282591096e-07/6.406794095248358e-09))/log (2)) =
4.000376043507966
% ((log (6.406794095248358e-09/3.999351960715103e-10))/log (2)) =
4.001764469781143

```

Script 6 – Log-Log Plot of Global Truncation Errors for Runge-Kutta Methods

```

% The step sizes in h1 are used to plot the
% global truncation errors of the forward Euler
% method, Heun's method, RK4 and RK5.
h1 = [0.1, 0.05, 0.025, 0.0125];

% The step sizes in h2 are used to plot the
% global truncation error of RK8.
h2 = [0.4, 0.2, 0.1, 0.05];

% Error1 is global truncation errors of the forward Euler method.
error1 = [0.013827239387109, 0.006504577699395, ...
          0.003156961521126, 0.001555416487666];

% Error2 is global truncation errors of Heun's method.
error2 = [0.001173953098629, 3.010909612657375e-04, ...

```

```
7.601465913853467e-05, 1.908536287215101e-05];
```

```
% Error3 is global truncation errors of RK4.
```

```
error3 = [1.625254322568104e-06, 1.025354282591096e-07, .
```

```
6.406794095248358e-09, 3.999351960715103e-10];
```

```
% Plot the step sizes in h1 and h2 and the global
```

```
% truncation errors in a log-log scale with base 10.
```

```
loglog (h1, error1)
```

```
hold on
```

```
loglog (h1, error2)
```

```
hold on
```

```
loglog (h1, error3)
```

```
hold on
```

```
xlabel('log(h)')
```

```
ylabel('log(error)')
```

```
legend ('Forward Euler', 'Heun', 'RK4')
```