

## بررسی تیوری و عملی قضیه‌های مومنت عطالت اجسام سخت با استفاده از رقاوه فزیک

پوهنیار محمد اجمل خیشکی<sup>۱</sup>، پوهنوال رجب علی خاوری<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup>دپارتمنت فزیک هسته‌یی، پوهنځی فزیک، پوهنتون کابل، کابل، افغانستان  
<sup>۲</sup>دپارتمنت فزیک و الکترونیک، پوهنځی فزیک، پوهنتون کابل، کابل، افغانستان  
ایمیل: khishkaiajmal@gmail.com

### چکیده

قضیه‌های مومنت عطالت از اهمیت زیادی در تعیین مومنت عطالت اجسام سخت با اشکال مختلف برخوردار است که در یک تحلیل تجربی با استفاده از رقاوه فزیک در لابراتوار میخانیک پوهنځی فزیک مورد ارزیابی قرار گرفت. نتایج حاصل از این بررسی تجربی نشان می‌دهد که قضایای محوره‌های موازی و جمع پذیری مومنت عطالت با دقت زیادی می‌تواند توسط تجربه رقاوه فزیک تایید گردد. رقاوه فزیک منحصیث یک میتود ارزشمند در تمامی لابراتوارهای میخانیک فزیک و انجینری برای تعیین مومنت عطالت و تعجیل جاذبه زمین مورد استفاده قرار می‌گیرد. با توجه به میتود رقاوه فزیک برای بررسی تجربی قضایای مومنت عطالت لازم است تا به تجارب دید متفاوت داشته و با تحلیل ارقام به نتایج ارزشمندی دست یافت.

**اصطلاحات کلیدی:** محوره‌های موازی؛ محوره‌های عمود؛ جمع مومنت‌ها؛ رقاوه فزیک؛ پرپود اهتزاز؛ مومنت؛ عطالت

## Theoretical and Practical Investigation of the Theorems of the Moment of Inertia of Rigid Bodies Using the Physical Oscillator

Jr. Teaching Asst. Mohammad Ajmal Khishkai<sup>1</sup>, Associate Prof. Rajab Ali Khawari<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Nuclear Physics, Faculty of Physics, Kabul University, Kabul, Afghanistan

<sup>2</sup>Department of Physics and Electronic, Faculty of Physics, Kabul University, Kabul, Afghanistan

Email: khishkaiajmal@gmail.com

### Abstract

The moment of inertia theorems, crucial for determining the moment of inertia of objects with diverse shapes, were assessed through experimental analysis using a physical oscillator in the Mechanics Laboratory at the Faculty of Physics. Results from this study demonstrate that the theorems of parallel axes and the additivity of moment of inertia can be accurately validated through the oscillator experiment. The physical oscillator emerges as a valuable tool in mechanics, physics, and engineering labs, facilitating precise determination of moment of inertia and acceleration due to Earth's gravity. Employing the physical oscillator method for experimental investigations of moment of inertia theorems necessitates adopting a unique perspective on experiences, yielding valuable results through comprehensive data analysis.

**Keywords:** Parallel Axes; Vertical Axes; Sum of Moments; Physical Oscillator; Vibration Period; Moment; Inertia

## مقدمه

مومنت عطالت دورانی در طیف گسترده‌ای از زمینه‌های تحقیقاتی ظاهر می‌شود. به‌عنوان مثال، به ساختار هسته اتم (1)، مالیکول‌ها (2) و ستاره‌های نوترونی (3) مربوط می‌شود. علاوه بر این، مومنت عطالت دورانی در طراحی توربین‌های بادی (4)، اندام‌های مصنوعی (5)، ربات‌ها (6)، اشیاء برای چاپ سه‌بعدی (7) و در کاربردهای بی‌شماری دیگر نقش مهمی را ایفا می‌کند.

تجارب مومنت عطالت اجسام جزء تجارب اساسی در لابراتوارهای فزیک و انجینری میخانیک می‌باشد. بعضاً تجارب برای تأیید نتایج تیوریک اجرا می‌گردد که تطابق بین تجربه و تیوری بعضاً صورت نمی‌گیرد. در این مقاله سعی کردیم تا با استفاده از امکانات لابراتواری فزیک و در نظر داشت دقت در اندازه‌گیری و محاسبه سه قضیه مهم تعیین مومنت عطالت اجسام که عبارت از قضیه محورهای موازی، قضیه محورهای متعامد و قضیه جمع مومنت‌ها را که در تیوری برقرار است، به‌صورت عملی اجرا و نتیجه‌گیری نماییم.

## تیوری

اجسام طبق قانون اول نیوتن تمایل به حفظ حالت خود دارد و برای ایجاد تغییر در حالت جسم باید قوه اعمال گردد. در حرکت‌های دورانی اجسام تحت قوه دورانی که تورک نامیده می‌شود، حول یک محور دلخواه دوران می‌کند. مومنت عطالت اجسام عبارت از مقاومت در برابر اعمال قوه دورانی است که اجسام از خود بروز می‌دهد. این مقاومت تابع کتله جسم و فاصله‌ی نقطه اثر قوه از محور دوران است. مومنت عطالت اجسام از طریقه‌های مختلف بدست می‌آید. در بیان انرژی حرکتی داریم:

$$K = \frac{1}{2}mv^2, \quad v = r\omega$$

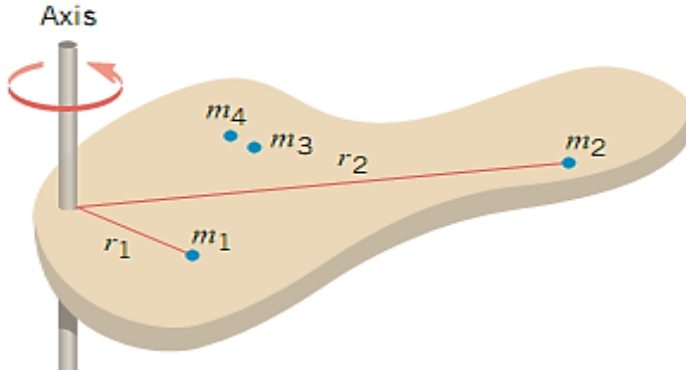
$$K = \frac{1}{2}m(r\omega)^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (1)$$

که در آن  $I = mr^2$ ، مومنت عطالت دورانی جسم حول محوری به فاصله  $r$  است. برای یک سیستم از ذرات ساکن در جسم می‌توان فرم مومنت عطالت را به‌صورت ذیل نوشت:

$$I = \sum m_i r_i^2 \quad (2)$$

در صورتی که ذرات در جسم به‌صورت متمادی قرار داشته باشد، فرم جمع‌بندی به انتیگرال‌گیری تبدیل می‌گردد که عبارتند از:

$$I = \int r^2 dm \quad (3)$$



شکل ۱: میله حول محور تعلیق خارج از مرکز ثقل (9)

در حرکت‌های اهتزازي مثل رقاصه فزيکي که جسم حول یک نقطه تعلیق اهتزاز يا حرکت پريودیک انجام می‌دهد، پريود حرکت با مومنت عطالت رابطه ذیل را دارد:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}} \quad (4)$$

که در آن  $m$  کتله،  $I$  مومنت کلی سیستم و  $d$  فاصله مرکز ثقل سیستم از نقطه تعلیق و يا دوران می‌باشد. برای ذراتی که از محور دوران به اندازه  $l$  دور است و مقدار مومنت عطالت به صورت  $I = ml^2$  می‌باشد. هم چنین برای میله‌های باریک یک‌نواخت به طول  $l$  مقدار این مومنت عطالتی حول محور عمود بر میله از نقاط مختلف متفاوت است، طوری که از مرکز  $\frac{1}{12} ml^2$  و از رأس  $\frac{1}{3} ml^2$  متفاوت می‌باشد (8). برای ساده سازی محاسبات در تعیین مومنت عطالت اجسام از قضیه‌های مهمی استفاده می‌گردد. این قضایا در محاسبه تیوریک مومنت عطالت حول هر محوری می‌تواند مؤثر باشد. قضایای مومنت عطالت در محاسبه مومنت دوران سیستم‌های میخانیکي به کار می‌رود؛ اما به طور کل برای هر سیستم (همانند مالیکول‌ها و مولتی ذرات) مسأله محاسبه مومنت عطالت یک پارامتر مهم در تعیین خواص دینامیکي آنها به حساب می‌آید.

### قضیه محورهای موازی

مومنت عطالت حول هر محور موازی با محور عبور نموده و از مرکز دوران جسم به صورت  $I_{CM} + md^2$  می‌باشد که  $d$  فاصله بین دو محور است. بسته به نوعیت مومنت عطالت مرکزی محور جدید نیز به همان صورت تعریف می‌گردد. در بیان کل طبق شکل (۲) یک نقطه دل‌خواه  $(x, y)$  را در نظر

می‌گیریم که از مبدأ مختصات به فاصله  $r$  قرار دارد. هم‌چنین مرکز ثقل جسم نیز به فاصله  $d$  از مبدأ مختصات فرضی قرار دارد.

رابطه بین کمیت‌های قدیم و جدید قرار ذیل است:

$$x = x' + x_{cm}, \quad y = y' + y_{cm}, \quad z = z' = 0 \quad (5)$$

بنابراین:

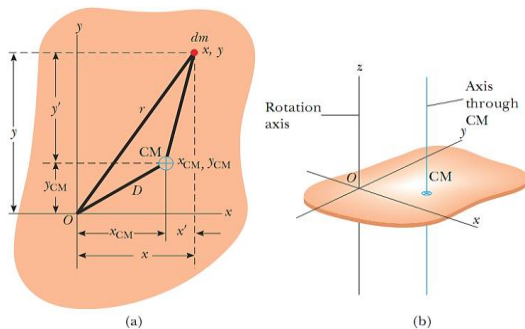
$$\begin{aligned} I &= \int r^2 dm = \int [(x' + x_{cm})^2 + (y' + y_{cm})^2] dm \\ &= \int (x'^2 + y'^2) dm + 2x_{cm} \int x' dm + 2y_{cm} \int y' dm \\ &\quad + \int (x_{cm}^2 + y_{cm}^2) dm \end{aligned} \quad (6)$$

انتیگرال اول از طرف چپ به راست مقدار مومنت عطالت  $I_{CM}$  است که از مرکز کتله و موازی با محور  $Z$  عبور می‌کند. انتیگرال دو حد بعدی صفر است. زیرا مشخصه مرکز کتله را می‌دهد و طبق تعریف مرکز کتله باید صفر باشد. انتیگرال حد اخیر مومنت عطالت مرکز ثقل نسبت به محوری به فاصله  $d$  را می‌دهد.

بنابراین:

$$I = I_{CM} + md^2 \quad (7)$$

از این می‌تود برای دریافت مومنت عطالت اجسام غیرمنظم و یا محورهای خارج از جسم استفاده اعظمی می‌شود و یک قضیه خیلی مهم در دریافت و محاسبه مومنت عطالت اجسام می‌باشد.



شکل ۲: a- قضیه محورهای موازی همراه با مومنت عطالت مرکز  $I_{CM}$  و مومنت حول محور عبور کننده از  $O$  و عمود بر مستوی جسم  $I_z = I_{CM} + md^2$ . b- نمای افقی محور دوران  $Z$  و موازی با محور عبورکننده بر مرکز (9).

### قضیه جمع مومنت‌های عطالت

مومنت عطالت یک خاصیتی از جسم است که اثرهای هر ذره‌ی جسم (مثلاً جسم غیر متمادی) به طور مستقل روی دروان کلی جسم وارد می‌گردد. به همین دلیل است که در حالت اجسام غیر متمادی مومنت عطالت به صورت رابطه ذیل بیان می‌گردد (10):

$$I = I_1 + I_2 + \dots \quad (8)$$

از خاصیت جمع‌پذیری مومنت‌های عطالت در تعیین مومنت عطالت جسم نامنظم هندسی می‌توان استفاده نمود. هم‌چنین در مورد اجزای یک سیستم که شکل‌ها و یا جنس‌های متفاوتی دارند و در صورتی که شکل و یا جنسیت روی هم‌دیگر اثر نداشته باشد، به صورت مستقیم جمع‌بندی می‌گردد. به طور مثال مومنت عطالت یک دیسک دایروی نازک با موجودیت یک حفره عبارت از فرق مومنت عطالت دیسک کامل و مومنت عطالت حفره است. از این خاصیت جمع‌پذیری مومنت‌ها می‌توان در تحلیل و محاسبه حالت‌های خیلی پیچیده‌تر استفاده نمود.

توجه: قضیه محورهای متعامد چون در سه بعد برقرار نیست؛ بنابراین، در این تحلیل شامل نمی‌گردد.

### سیستم رقااصه

برای ثبوت عملی قضایای فوق از سیستم رقااصه استفاه می‌گردد. رقااصه ساده شامل یک جسم کوچک و سنگین است که تو سط یک تار باریک و غیر قابل ارتجاع از یک نقطه تحت نام نقطه تعلیق آویزان است و تحت زوایه کوچک حرکت پریودیکی را انجام می‌دهد که رابطه بین پریود  $T$  و طول تار  $l$  و جاذبه  $g$  به صورت ذیل است:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (9)$$

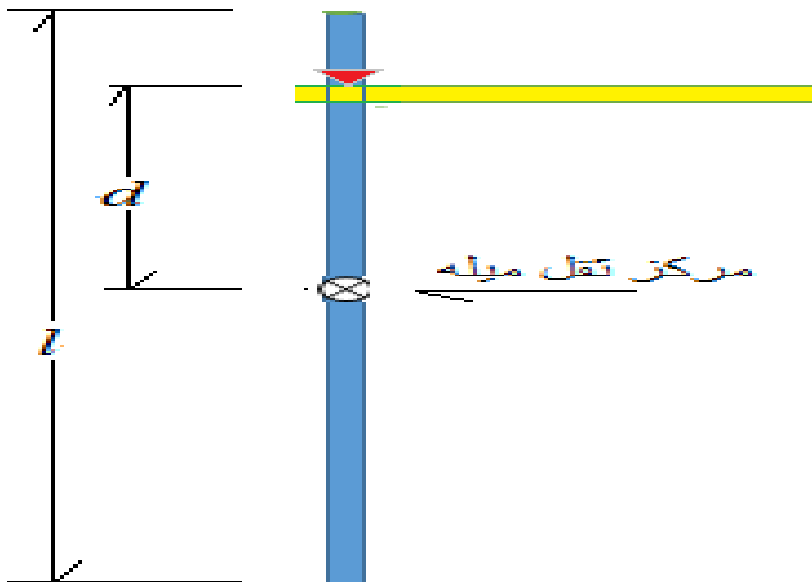
سیستم دیگر اهتزازی رقااصه فزیکي است. رقااصه فزیکي یک سیستم اهتزازي است که حول یک نقطه تعلیق خارج از مرکز ثقل جسم حرکت رفت و برگشتی انجام می‌دهد. جسم بر اثر وزن خودش بعد از خارج شدن از تعادل به حالت تعادل برمی‌گردد و در این پروسه انرژی حرکتی به پوتنشیل و بالعکس تبدیل می‌گردد. پریود حرکت اهتزازي رقااصه فزیکي با مشخصه‌های جسم که عبارت از مومنت عطالت، وزن و فاصله مرکز ثقل از نقطه تعلیق ارتباط دارد و به صورت ذیل است:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}} \quad (10)$$

هرگاه جسم فزیکى شامل میله باریک باشد، مومنت عطالت میله حول محور تعلیق خارج از مرکز ثقل برابر است با:

$$I_{beam} = I_{cm} + md^2 \quad (11)$$

هرگاه یک جسم دیگر با کتله  $M$  روی میله سوار گردد، مومنت عطالت سیستم در این حالت به صورت ذیل است:



شکل ۳: میله حول محور تعلیق خارج از مرکز ثقل (9)

$$I_{mass-beam} = I_{beam} + I_{mass} = I_{cm} + md^2 + Ml^2 \quad (12)$$

که  $l$  فاصله مرکز ثقل جسم از نقطه تعلیق است. قضیه فوق تحت نام قضیه جمع مومنت‌ها بیان می‌گردد. به‌طور کل مومنت اجسام مختلف حول یک محور دل‌خواه با هم جمع بسته می‌شود. یعنی هر جسم اثر مستقل خود را روی مومنت عطالت کل دارد. مومنت عطالت میله حول محور عمود بر میله طبق رابطه (۱۰) می‌تواند به‌صورت ذیل تبدیل گردد:

$$T^2 d = \frac{4\pi^2 I_{cm}}{mg} + \frac{4\pi^2}{g} d^2 \quad (13)$$

که در صورت ترسیم گراف  $T^2 d$  به تابع  $d^2$  قسمت تقاطع خط با محورها در یک فیت خطی با معلوم بودن کتله میله مقدار  $I_{cm}$  را می‌دهد.

تغییرات  $T$  به تابع فاصله  $d$  یک منحنی را می‌دهد که در یک نقطه تحت عنوان  $T_{min}$  و  $d_{min}$  دارای مقدار اصغری می‌باشد و خصوصیت این نقطه این است که پیروی در این نقطه کم‌ترین و در دو طرف آن

زیاد می‌گردد. برای دریافت این نقطه از تابع  $T(d)$  نسبت به  $d$  مشتق گرفته و مساوی به صفر قرار می‌دهیم که نتیجه آن می‌شود (11) :

$$T_{min} = 2\pi \sqrt{\frac{2d_{min}}{g}}, d_{min} = \sqrt{\frac{I_{cm}}{m}} \quad (14)$$

مقدار مومنت عطالت حول مرکز میله باریک از این نتیجه نیز به دست می‌آید. از طرفی پریود رقاوه فزیکي یک میله باریک زمانی می‌تواند برابر پریود اهتزاز رقاوه ساده گردد که طول تار رقاوه ساده یا طول معادل آن در شرط ذیل صدق کند:

$$T_{S.P} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{and} \quad T_{Ph.P} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_{cm} + md^2}{mgd}}$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{\frac{mL^2}{12} + md^2}{mgd}}$$

$$l = \frac{\frac{L^2}{12} + d^2}{d} \quad (15)$$

با داشتن فاصله مرکز ثقل از نقطه تعلیق و طول میله می‌توان طول رقاوه ساده معادل را تعیین نمود. در سیستم رقاوه فزیکي و جسم که می‌تواند من‌حیثیت میتود عملی دریافت قضیه جمع مومنت‌ها عمل نماید، لازم است تا مرکز ثقل سیستم تعیین گردد که هم به صورت تیوریک و یا هم تجربی به وسیله اویزان کردن بدست آید.

رابطه پریود اهتزاز سیستم همان رابطه (15) است که به صورت ذیل تبدیل شده است:

$$T_{r-b} = 2\pi \sqrt{\frac{I_{rb}}{(M+m)gd}}, \quad I_{rb} = (I_r + I_b) \quad (16)$$

که  $d$  همان مرکز ثقل سیستم می‌باشد. در این نتیجه قضیه جمع مومنت‌های عطالت به صراحت دیده می‌شود.

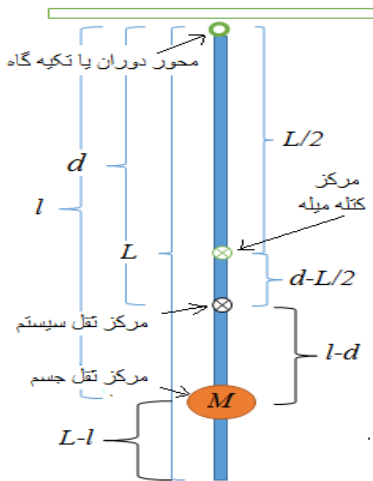
در تحلیل تیوریک دریافت مرکز ثقل سیستم، طبق شکل مرکز ثقل سیستم میله+جسم روی مرکز ثقل میله قرار ندارد؛ زیرا کتله  $M$  تورک اضافی را ایجاد می‌کند.

تورک حاصل از جسم  $M$  برابر تورک حاصل از مرکز

ثقل میله است یعنی:

$$M(l - d) = m \left( d - \frac{L}{2} \right)$$

$$d = \left( \frac{ML + \frac{mL}{2}}{M + m} \right) \quad (17)$$



شکل (۴): میله حول محور تعلیق خارج از مرکز

این مقدار  $d$  همان مقداری است که در رابطه (۱۳) قرار می‌گیرد و معادله قابل حل است.

در حد  $M = 0$  مقدار  $d = L/2$  حاصل می‌گردد که توقع می‌رود. پریود اهتزاز سیستم میله جمع جسم عبارت است از:

$$T_{beam+mass} = 2\pi \sqrt{\frac{ML^2 + \frac{mL^2}{3}}{g(M + \frac{mL}{2})}} \quad (18)$$

در تحلیل تجربی از میتود آویزان کردن برای دریافت مرکز ثقل سیستم استفاده می‌گردد. هرگاه نتیجه تجربی و تیوریک باهم مطابقت داشته باشد، می‌توان درستی نتیجه تیوریک را تأیید نمود (12). در صورتی که  $l = L/2$  باشد سه مرکز ثقل برهم منطبق بوده و پریود اهتزاز در یک بیان به صورت:

$$T_{rb} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{M L^2}{4} + \frac{m L^2}{3}}{g \left( \frac{M L}{2} + \frac{m L}{2} \right)}} \quad (19)$$

حاصل می‌گردد و در بیان دیگر از تعریف مومنٹ عطالت میله و جسم داریم:

$$T_t^2 = T_{\text{میله}}^2 + T_{\text{جسم}}^2 = 4\pi^2 \left( \frac{M \frac{L^2}{4}}{MgL} + \frac{m \frac{L^2}{3}}{mgL} \right) = 4\pi^2 \frac{M \frac{L^2}{4} + \frac{m L^2}{3}}{g \left( \frac{ML}{2} + \frac{mL}{2} \right)}$$

$$T = \sqrt{T_{\text{میله}}^2 + T_{\text{جسم}}^2} = 2\pi \sqrt{\frac{M \frac{L^2}{4} + \frac{m L^2}{3}}{g \left( \frac{ML}{2} + \frac{mL}{2} \right)}} \quad (20)$$



یعنی سیستم جسم و میله مثل دو قسمت مجزا با هم جمع می‌گردد. این به علت قرارگیری دو مرکز ثقل جسم و میله روی هم می‌باشد. در این حالت نیز طول معادل رقاچه ساده برای سیستم رقاچه میله جمع جسم تعیین نمود که باز هم از برابری دو پریود اهتزاز داریم:

$$T_{S.P} = 2\pi \sqrt{\frac{l'}{g}} = T_{Ph.P} = 2\pi \sqrt{\frac{Ml^2 + \frac{mL^2}{3}}{g \left( Ml + \frac{mL}{2} \right)}} \quad (21)$$

$$l' = \frac{Ml^2 + \frac{mL^2}{3}}{\left( Ml + \frac{mL}{2} \right)}$$

که طول رقاچه ساده معادل تابع کتله‌های میله و جسم و هم چنین طول میله و فاصله جسم از نقطه تعلیق است. با فرضیاتی  $l = \frac{L}{2}$ ,  $M = \frac{m}{2}$  این نتیجه می‌تواند ساده گردد. مثلاً  $l' = \frac{11}{18}l$  برای محاسبه و دریافت مومنت عطالت اجسام به صورت تجربی روش‌های متعددی وجود دارد که به صورت ذیل طبقه‌بندی می‌گردد (13):

جدول ۱: طبقه‌بندی میتودهای تجربی برای دریافت مومنت عطالت اجسام

شماره	نوع تئوری و یا قانون به کار رفته	وسیله مورد استفاده	نوع میتود و یا روش تطبیق شده
۱	اهتزاز	فنر	رقاچه تورزیونی
			فنر خطی
		رقاچه	رقاچه فیزیکی
			ریل خمیده
			رقاچه چند رشته ای
			مرکز متغیر کتله
۲	تعجیلی		غلطیدن
			ارتفاع جسم سقوط کننده
			تیزی دروانی جسم سقوط کننده

### طرز العمل تجربی

برای بررسی تجربی صحت قضایای مومنت عطالت از سیستم رقاچه استفاده شده است که زمان پریود توسط یک سنسور نوری با دقت 0.001s اندازه‌گردیده است. اندازه‌گیری در لابراتوار میخانیک پوهنځی فزیک صورت گرفته و هر مرحله به صورت مجزا بررسی شده است. سعی شده است تا برای تقلیل خطا از اصطکاک و دیگر عوامل مخرب تجربی تا حد زیادی دوری گردد. هم چنین تمام جداول و گراف‌ها در ایکسل ترسیم گردیده و نتیجه‌گیری شده است.

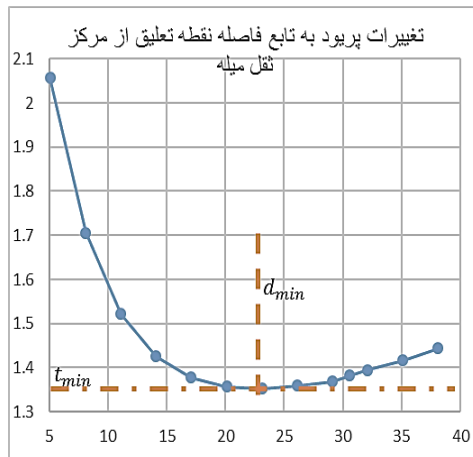
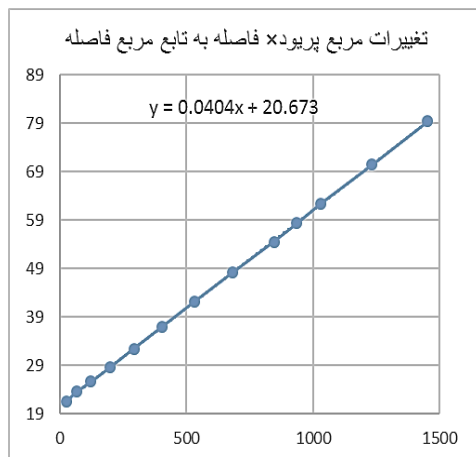
### نتایج

در مرحله اول میله به طور جداگانه از یک رأس اهتزاز داده شده و با در نظر داشت رابطه (۱۵) و طول معادل، پریود اهتزاز با رقا صه فزیکى و رقا صه ساده اندازه و با هم مقایسه گردیده است. جدول ۲ این اندازه‌گیری‌ها را نشان می‌دهد.

جدول ۲: اندازه‌گیری پریود اهتزاز میله به صورت مستقیم و هم چنین دریافت طول معادل براساس رابطه (۱۵) و پریود رقا صه با طول معادل برای ثبوت تجربی قضیه محورهای موازی

پریود اهتزاز میله	فاصله تکیه‌گاه تا مرکز ثقل میله	$l = \left(\frac{l^2}{12} + d^2\right)/d$	پریود اهتزاز رقا صه ساده با طول معادل	اختلاف دو اندازه‌گیری	فیصدی اختلاف
۱،۴۵۳	۳۹،۲۵	۵۲،۳۳۳۳۳۳۳	۱،۴۶۳	۰،۰۱	۱
۱،۴۱۶	۳۵	۴۹،۶۷۲۰۲۳۸۱	۱،۴۱	۰،۰۰۶	۰،۶
۱،۳۸۶	۳۱	۴۷،۵۶۵۱۸۱۱۷	۱،۳۸۳	۰،۰۰۳	۰،۳
۱،۳۶۲	۲۷	۴۶،۰۱۹۲۹۰۱۲	۱،۳۵۷	۰،۰۰۵	۰،۵
۱،۳۵۳	۲۳	۴۵،۳۲۶۹۹۲۷۵	۱،۳۴۹	۰،۰۰۴	۰،۴
۱،۳۶۴	۱۹	۴۶،۰۲۷۴۱۲۲۸	۱،۳۵۷	۰،۰۰۷	۰،۷
۱،۴۱۱	۱۵	۴۹،۲۳۴۷۲۲۲۲	۱،۴۰۷	۰،۰۰۴	۰،۴
۱،۵۲۷	۱۱	۵۷،۶۸۳۷۱۲۱۲	۱،۵۲۱	۰،۰۰۶	۰،۶

ملاحظه می‌گردد که میزان فیصدی اختلاف کمتر از واحد بوده و می‌تواند درستی تیوری را نشان دهد. در مرحله بعد برای بررسی قضیه محورهای موازی میله از مرکز به طرف یک رأس با تغییر تکیه‌گاه اهتزاز داده شده و پریود اهتزاز اندازه شده است. طبق رابطه (۱۸) هرگاه فیت خطی صورت گیرد، قضیه محورهای موازی درست است که نتیجه اندازه‌گیری و وضع در رابطه (۱۶) یک فیت خطی خوبی را نشان می‌دهد. هم چنین مومنت مرکز ثقل در میتود رقا صه فزیکى قابل تعیین نیست. اما با استفاده از روابط (۱۷) و نقاط پریود و فاصله اصغری براساس شکل (۴) این مومنت قابل تعیین است. هرگاه این مقدار با مقدار  $\frac{1}{12} ml^2$  با توجه به  $m = 156 \text{ gr}$  ,  $l = 78 \text{ cm}$  مقایسه گردد و ملاحظه می‌گردد.



شکل ۵: a- فیت خطی  $T^2d$  به تابع  $d^2$  که اشاره به درست بودن قضیه محورهای موازی براساس رابطه (۱۵) دارد. b-

تعیین نقاط  $d_{min}$  و  $T_{min}$  برای دریافت مومنت عطالت مرکز ثقل براساس رابطه (۱۶)

که تطابق خوبی برقرار است. در مرحله سوم قضیه جمع مومنت‌ها بررسی می‌گردد که در این مرحله سیستم میله و جسم در فواصل مختلف جسم از رأس آزاد میله باهتزاز در آمده و پریود اهتزازات تعیین گردیده است. مقدار تیوریک از رابطه (۱۸) و مقدار تجربی مربع پریود با هم مقایسه گردیده و نتیجه آن یک تطابق خوب بین نتایج تیوری و تجربه می‌باشد. نتایج در جدول ۳ آورده شده است.

جدول ۳: اندازه‌گیری تجربی مربع پریود و رابطه (۱۸) جهت مقایسه در مسئله قضیه جمع مومنت‌های عطالت

فاصله از رأس	پریود اهتزاز	فاصله مرکز ثقل رأس	فاصله مرکز ثقل از آویز	مربع پریود	$\frac{4\pi^2(\frac{1}{3}mL^2 + ML^2)}{(m + M)gd}$	اختلاف	فیصدی اختلاف
۳,۰۰۰	۱,۵۹۶	۲۹,۹۰۰	۴۸,۶۰۰	۲,۵۴۷۲	۲,۵۶۲۳	۰,۰۱۵۰	۱,۵۰۴۸
۷,۰۰۰	۱,۵۶۹	۳۱,۰۰۰	۴۷,۵۰۰	۲,۴۶۱۸	۲,۴۷۴۱	۰,۰۱۲۴	۱,۲۳۷۸
۱۱,۰۰۰	۱,۵۴۴	۳۲,۲۰۰	۴۶,۳۰۰	۲,۳۸۳۹	۲,۳۹۵۲	۰,۰۱۱۳	۱,۱۲۷۸
۱۵,۰۰۰	۱,۵۱۸	۳۳,۴۵۰	۴۵,۰۵۰	۲,۳۰۴۳	۲,۳۲۳۱	۰,۰۱۸۸	۱,۸۷۹۲
۱۹,۰۰۰	۱,۴۹۵	۳۴,۷۰۰	۴۳,۸۰۰	۲,۲۳۵۰	۲,۲۵۵۶	۰,۰۲۰۶	۲,۰۵۸۱
۲۳,۰۰۰	۱,۴۷۲	۳۵,۹۰۰	۴۲,۶۰۰	۲,۱۶۶۸	۲,۱۹۰۵	۰,۰۲۳۷	۲,۳۷۳۰
۲۷,۰۰۰	۱,۴۵۱	۳۷,۱۰۰	۴۱,۴۰۰	۲,۱۰۵۴	۲,۱۳۰۹	۰,۰۲۵۵	۲,۵۴۵۶
۳۱,۰۰۰	۱,۴۳۵	۳۸,۳۰۰	۴۰,۲۰۰	۲,۰۵۹۲	۲,۰۷۷۱	۰,۰۱۷۹	۱,۷۸۹۵
۳۵,۰۰۰	۱,۴۱۷	۳۹,۵۰۰	۳۹,۰۰۰	۲,۰۰۷۹	۲,۰۲۹۹	۰,۰۲۲۰	۲,۱۹۶۱

هم چنین مومنت عطالت تجربی و مومنت عطالت تیوریک در جدول ۴ به مقایسه در آمده است که باز هم تطابق خوب تیوری و تجربه را نشان می دهد. هردوی این نتیجه مقایسه بین قیمت های تیوریک و تجربی است و میزان اختلاف نسبی کم تر از میزان خطای لابراتواری می باشد.

جدول ۴: اندازه گیری فواصل و زمان اهتزاز برای تأیید قضیه جمع مومنت ها براساس مومنت عطالت تجربی و مومنت عطالت تیوریک گرفته شده از رابطه (۱۶) و میزان فیصدی خطا در حدود ۰,۳

فاصله	فاصله مرکز	مربع پرپود	$I_{exp-rb} = \frac{(M-m)}{4\pi^2} T_{rb}^2$	$I_{the-rb} = I_r + I_b$	اختلاف دو مقدار	فیصدی اختلاف
فاصله جسم از تکیه گاه	پرپود اهتزاز	ثقل از تکیه گاه				
۷۵,۵۰۰	۱,۵۹۶	۴۸,۶	۲,۵۴۷۲۱۶	۰,۱۶۰۰۰۶۹۴۷	۰,۱۶۳۰۷۶۳۰۸	۰,۰۰۳۳۰۷۱۶۶
.	.	.	.	.	۲	۰,۳۰۷۱۱۶۶
۷۱,۵۰۰	۱,۵۶۹	۴۷,۵	۲,۴۶۱۷۶۱	۰,۱۵۱۱۳۶۷۳۹	۰,۱۵۳۹۰۳۵۰۸	۰,۰۰۲۷۶۶۷۶۹
.	.	.	.	.	.	۰,۲۷۶۶۷۷
۶۷,۵۰۰	۱,۵۴	۴۶,۳	۲,۳۸۳۹۳۶	۰,۱۴۲۶۶۱۲۸۶	۰,۱۴۵۲۲۹۹۰۸	۰,۰۰۲۵۶۸۶۲۲
.	۴	.	.	.	.	۰,۲۵۶۸۶۲
۶۳,۵۰۰	۱,۵۱	۴۵,۰۵	۲,۳۰۴۳۲۴	۰,۱۳۴۱۷۴۱۶۲	۰,۱۳۷۰۵۵۵۰۸	۰,۰۰۲۸۸۱۳۴۷
.	۸	.	.	.	.	۰,۲۸۸۱۳۵
۵۹,۵۰۰	۱,۴۹	۴۳,۸	۲,۲۳۵۰۲۵	۰,۱۲۶۶۲۲۸۱۱۸	۰,۱۲۹۳۸۰۳۰۸	۰,۰۰۲۸۵۲۱۹۱
.	۵	.	.	.	.	۰,۲۸۵۲۱۹
۵۵,۵۰۰	۱,۴۷	۴۲,۶	۲,۱۶۶۷۸۴	۰,۱۱۹۳۰۴۲۱	۰,۱۲۲۲۰۴۳۰۸	۰,۰۰۲۹۰۰۰۹۸
.	۲	.	.	.	.	۰,۲۹۰۰۱
۵۱,۵۰۰	۱,۴۵	۴۱,۴	۲,۱۰۵۴۰۱	۰,۱۱۲۶۵۸۹۵۵	۰,۱۱۵۵۲۷۵۰۸	۰,۰۰۲۸۶۸۵۵۴
.	۱	.	.	.	.	۰,۲۸۶۸۵۵
۴۷,۵۰۰	۱,۴۳	۴۰,۲	۲,۰۵۹۲۲۵	۰,۱۰۶۹۹۴۲۴۲	۰,۱۰۹۳۴۹۹۰۸	۰,۰۰۲۳۵۵۶۶۶
.	۵	.	.	.	.	۰,۲۳۵۵۶۷
۴۳,۵۰۰	۱,۴۱	۳۹	۲,۰۰۷۸۸۹	۰,۱۰۱۲۱۲۶۶۵	۰,۱۰۳۶۷۱۵۰۸	۰,۰۰۲۴۵۸۸۴۴
.	۷	.	.	.	.	۰,۲۴۵۸۸۴

### نتیجه گیری

این تحلیل تجربی برای سؤالی که امکان استفاده از رقاصه فزیک برای بررسی صحت تجربی قضایای مومنت عطالت برقرار است، صورت گرفته و نتیجه آن مثبت می باشد. با استفاده از میتودهای مختلف محاسباتی و تجربی در باره قضایای مومنت عطالت که در نتایج به صورت گراف و جداول آمده است، دیده می شود که میزان اختلاف در انتروال دقت تجربه (دقت کتله  $1gr$  و دقت طول  $1mm$  و دقت زمان  $0.001s$ ) بوده و نشان از درستی نتایج تیوریک دارد. مهم تر از همه این که رقاصه فزیک

منحيث وسيله ی مورد اندازه گیری در تمام مراحل ، اهمیت عملکرد خود را نشان داده و دیده می شود که تجارب در صورت نگرش متفاوت می تواند نتایج خیلی مفید و ارزشمندی را ارائه دارد .

1. Alhassid Y, Bertsch GF, Liu S. Nuclear moment of inertia and spin distribution of nuclear levels. *Phys. Rev. C*. 2005; 72(6).
2. Townes CH, Schawlow LS. *Microwave Spectroscopy*: Courier Corporation; 2013.
3. Bejger M, Haensel P. Moments of inertia for neutron and strange stars: Limits derived for the Crab pulsar. *Astron. strophysics*. 2002; 396(3): 917-921.
4. Ran L, Bumby JR, Tavner PJ. Use of turbine inertia for power smoothing of wind turbines with a DFIG. in *IEEE 11th International Conference on Harmonics and Quality of Power*. 2004;; 106-111.
5. Y. S. Narang VMAaAGW. The effects of prosthesis inertial properties on prosthetic knee Moment and hip energetics required to achieve able-bodied kinematics. *IEEE Trans. Neural Syst. Rehabili. Eng.*. 2016; 24(7): 754-763.
6. Feder T, Vittek J, Sindler P. T. Fedor, J. Vittek, and P. Sindler, "Influence of variable moment of inertia in robot servo motor control: *IEEE ELEKTRO*; 2014.
7. Bacher M, Whiting E, Bickel B, Storkin O. Spin-it: Optimizing moment of inertia for spinnable objects. *ACM Trans. Graph*. 2014; 33(4).
8. Cutnell JD, Johnson KW. *Physics*. 9th ed.: John Wiley & Sons, Inc.; 2012.
9. Serway RA, Jewett, Jr. JW. *PHYSICS for Scientists and Engineers with Modern Physics*. 7th ed.: Brooks/cole THOMSON.
10. Fowles GR, Cassiday GL. *Analytical Mechanics*: Thomson Learning / Brooks/Cole; 2004.
11. Russeva GB, Tsutsumanova GG, Ressev SC. An experiment on a physical pendulum and Steiner's theorem. *PHYSICS EDUCATION*. 2010; 45 (1).
12. Richardson TH, Brittle SA. Physical pendulum experiments to enhance the understanding of moments of inertia and simple harmonic motion. *PHYSICS EDUCATION*. 2012; 47(5): 537-544.
13. Genta G, Delprete C. Some Considerations on the Experimental Determination of Moment of Inertia. *Meccanica*. 1994; 29(1): 125-141.