بررسی عمل‌کرد اوپراتور لاپلاسین روی تصاویر دیجیتال در حوزه‌ی مکان

پوهنیار الله‌محمد هځاند

دیپارتمنت ساینس، پوهنځی تکنالوژی و معلوماتی، پوهنتون کابل، کابل، افغانستان
ایمیل: amhassand@gmail.com

چکیده

اوپراتور لاپلاسین به‌عنوان یک فیلتر روی تصاویر دیجیتال اعمال می‌شود. فیلترهایی‌که به اساس لاپلاسین طراحی می‌شوند، در بهبود تصاویر دیجیتال کاربرد دارد. از ویژگی‌های این فیلترها برای بهبود تصاویر دیجیتال جهت روشن کردن تصویر، بدست آوردن جزئیات کوچک تصویر و بدست آوردن لبه‌ها می‌توان اشاره کرد. لاپلاسین یک اوپراتور خطی است. بناءً، پیاده‌سازی این فیلترها آسان و در حوزه مکان روی تصاویر اعمال می‌شود. می‌توان برای فیلترگذاری غیرخطی هم از این فیلترها استفاده کرد. چون بازده روش‌های پردازش مکانی از نظر محاسباتی بالا است و پیاده‌سازی آن‌ها نیاز به منابع پردازش‌کننده‌ی کم‌تری دارند. بناءً، فیلترهای مبتنی بر لاپلاسین از نظر محاسبه و پردازش برای دستگاهای الکترونیکی به‌صرفه است. در این مقاله، به اساس لاپلاسین فیلترهای خطی مکانی طراحی گردیده و با استفاده از نرم‌افزار متلب روی تصاویر مختلف پیاده‌سازی شده است. نتایج بدست‌آمده عمل‌کرد خوب فیلترهای مبتنی بر لاپلاسین و تصاویر بهبودیافته را نشان می‌دهد.

اصطلاحات کلیدی: لاپلاسین؛ تصاویر دیجیتال؛ فیلترها؛ حوزه مکان؛ لبه‌ها؛ بهبود تصاویر

Investigating the Performance of Laplacian Operator on Digital Images in Spatial Domain

Jr. Teaching Asstt. Allah Mohammad Hassand

Department of Science, Faculty of Information and Technology, Kabul University, Kabul, Afghanistan
Email: amhassand@gmail.com

Abstract

The Laplacian operator is applied as a filter on digital images. Laplacian-based filters are used to enhance digital images. Features of these filters for Images enhancement include; image sharpening, finding small details of images and edges detection. Laplacian is a linear operator so implementing of these filters are easy in Spatial Domain. These filters are also used for non-linear filtering. The efficiency of spatial domain processing methods is computationally better and their implementation requires less processing resources, thus Laplacian-based filters are cost-effective for electronic devices in terms of calculation and processing. In this paper, spatial linear filters are designed based on Laplacian and Implemented on different images using MATLAB software. The results show better performance of Laplacian-based filters and improved images.

Keywords: Laplacin; Digital Images; Filters; Spatial Domain; Edges; Images Enhancement

مقدمه

تکنالوژی‌های مختلف پردازش تصویر باعث انقلابی در نحوه‌ی ضبط، ذخیره یا بازیابی یک تصویر از یک منبع شده است. متداول‌ترین وظایف پردازش تصویر عبارت از بازیابی تصویر، تقسیم‌بندی تصویر، بهبود تصویر، حذف نایز (Noise) تصویر و غیره است. چنین تصاویر با استفاده از روش‌های مختلف تصویربرداری بدست می‌آید، مانند؛

MRI (Magnetic Resonance Imaging)، CAT (Computer Assisted Tomography)، DBS (Deep Brain Stimulation)، EEG (Electroencephalography) و غیره. باوجود نوآوری و پیشرفت‌های سریع در تکنالوژی‌های مختلف تصویربرداری، چیزی‌که قابل‌ذکر است در همه‌ی روش‌های تصویربرداری ریاضیات نقش اساسی دارد. بسیاری از روش‌های پردازش تصویر به تکنیک‌های اساسی ریاضی؛ مانند ترسیم هیستوگرام، احصایه و احتمالات، تبدیل فوریه، معادلات تفاضلی، انتیگرال‌گیری، متریکس و الجبر متکی هستند (۱). در این مقاله عمل‌کرد اوپراتور لاپلاسین به‌عنوان یک فیلتر خطی مکانی که به اساس مشتقات دوم برای بهبود تصاویر دیجیتال در حوزه مکان طراحی گردیده، بررسی می‌شود. ابتدا به معرفی حوزه مکان و تابع تصویر می‌پردازیم.

اصطلاح حوزه مکان به خود صفحهٔ تصویر اشاره دارد که در برگیرنده‌ی پیکسل‌های تصویر است. روش‌های پردازش تصویر این حوزه، مستقیماً با پیکسل‌های تصویر سروکار دارند. فیلترگذاری مکانی از ابزار اصلی به‌کاررفته در پردازش تصویر طیف وسیعی از کاربردها را دارد. به‌طور کلی نتیجه روش‌های پردازش مکانی از لحاظ محاسباتی بالاتر بوده و پیاده‌سازی آن‌ها نیاز به منابع پردازش‌کننده‌ی کم‌تری دارد. فرآیندهای حوزه مکان با عبارت زیر نمایش داده می‌شود (۲):

$$g(x,y) = T[f(x,y)] \dots . (1)$$

که در آن $f(x,y)$ تصویر ورودی، $g(x,y)$ تصویر خروجی و T اوپراتور بروی f است که در هم‌سایگی نقطه (x,y) تعریف می‌شود.

روش‌های مختلف پردازش تصویر مبتنی بر ریاضیات برای بهبود تصاویر دیجیتال وجود دارد؛ مانند مشتق دوم تصویر که نشان می‌دهد در تصویر کجا تغییر رنگ یا لبه وجود دارد و آن‌را بدست آورد. اگر در تصویر یک تغییر رنگ شدید یا ناگهانی وجود داشته باشد هم مشتق اول و هم مشتق دوم آن‌را نشان می‌دهد. چون تصویر دیجیتال یک سیگنال دوبعدی است و تغییرات رنگ باید در هردو جهت عمودی و افقی بررسی شود. بناءً، برای دریافت لبه‌ها یا جای که تغییر رنگ داشته باشد در هر دو جهت از لاپلاسین استفاده می‌شود. می‌توان لاپلاسین را به‌عنوان یک فیلتر با استفاده از کانولوشن پیاده‌سازی کرد. کانولوشن می‌تواند یک فیلتر خطی را پیاده‌سازی‌کند و لاپلاسین هم در حوزه مکان

به‌عنوان یک فیلتر خطی عمل می‌کند. معمولاً برعلاوه بررسی تغییرات شدت روشنایی و رنگ در جهت‌های افقی و عمودی، در جهت‌های دیگر مانند ۴۵ درجه نیز این تغییرات بررسی می‌شود.

در تصاویر، معمولاً به مرز بین دو ناحیه که دارای تفاوت قابل‌توجه در شدت روشنایی، بافت (Texture) یا تغییر رنگ داشته باشد، لبه گفته می‌شود (۳). یکی از مزایای استخراج لبه در تصویر، توانایی جداسازی و تشخیص اشیاء از پس‌زمینه است. این مزیت ویژه لبه سبب شده است تا فرآیند تشخیص لبه در کاربردهای مختلفی از جمله ناحیه‌بندی، استخراج ویژگی‌های مرز و توصیف شکل استفاده شود.

به‌طورکلی روش‌های شناسایی لبه در تصویر به دو دسته روش‌های جهت‌دار و غیر جهت‌دار تقسیم می‌شوند. در روش‌های جهت‌دار معمولاً تشخیص لبه به‌وسیله فیلترگذاری تصویر با استفاده از دو ماسک (Mask) متفاوت صورت می‌گیرد؛ درحالی‌که در روش‌های غیر جهت‌دار عمل فیلترگذاری تصویر با استفاده از یک ماسک صورت می‌گیرد. به‌دلیل خاصیت گرادیانی اوپراتورهای استفاده‌شده در هر دو روش، این روش‌ها بسیار وابسته به نایز هستند. فیلترهای سوبل (Sobel) و روبرت (Robert) دو نمونه از لبه‌یاب‌های جهت‌دار هستند. این اوپراتورها با محاسبه گرادیان مکانی در یک تصویر و انتخاب مکان‌هایی با بیشترین گرادیان عمل تشخیص لبه را انجام می‌دهند (۴).

لبه‌یاب‌های مبتنی بر لاپلاسین گوسی، ابتدا تصویر را با استفاده از یک فیلتر گوسی هموار ساخته و سپس با محاسبه‌ی مشتق دوم مانند لاپلاسین، لبه‌ها را در تصویر مشخص می‌کنند. این روش در تشخیص لبه‌های ضعیف و لبه‌هایی با اتصالات کم، خوب عمل نمی‌کند.

یکی دیگر از روش‌های تشخیص لبه، الگوریتم کنی (Canny) است. در این روش ابتدا تصویر با یک فیلتر گوسی هموار شده و گرادیان آن محاسبه می‌شود. سپس در هر همسایگی با جستجو در جهت گرادیان بیشترین مقدار گرادیان انتخاب می‌شود. اگرچه این لبه‌یاب قادر به استخراج بیشترین لبه از تصویر است ولی سبب تخریب شکل تصویر و تشکیل لبه‌های دوتایی می‌شود. فیلتر کنی در تصاویر بدون نایز نسبت به سایر فیلترهای لبه‌یاب خوب عمل می‌کند، اما با توجه به این‌که اکثر تصاویر نایزی هستند. بناءً، این روش برای لبه‌یابی تصاویر نایزی مناسب نیست و هم‌چنان روش‌های لبه‌یابی مبتنی بر آستانه‌گذاری (Thresholding) در حضور نایز عمل‌کرد مناسبی ندارند.

روش‌های لبه‌یابی ذکرشده دارای مزایا و معایب خود هستند. معمولاً به دنبال روش‌های هستیم که پیاده‌سازی آن آسان، سبب تخریب تصویر اصلی نشود، در مقابل نایز مقاوم و هم‌چنان پردازش کم‌تری نیاز داشته باشد. لبه‌یابی مبتنی بر لاپلاسین دارای این ویژگی‌ها است. لاپلاسین یک اوپراتور خطی است که به‌عنوان یک فیلتر روی تصاویر دیجیتال اعمال می‌شود. با استفاده از فیلتر لاپلاسین لبه‌ها و

جزئیات کوچک تصاویر بدست می‌آید و نتیجه اعمال این فیلتر روی تصاویر دیجیتال، تصاویر بهبودیافته نسبت به تصاویر اصلی می‌باشند.

از ویژگی‌های فیلتر لاپلاسین می‌توان به پیاده‌سازی آسان این فیلتر، استفاده برای فیلترگذاری غیرخطی، نیاز به منابع کم‌تر پردازش‌کننده و هم‌چنان پیاده‌سازی آن در حوزه مکان اشاره کرد.

با استفاده از فیلترهای لاپلاسین که جزئیات کوچک تصویر، نقاط، خطوط و لبه‌ها بدست می‌آید در بهبود تصاویر دیجیتال، بهبود اطلاعات تصویر به‌منظور کمک به تعبیر انسانی، ارسال و نمایش برای ادراک ماشینی خودکار، عکس‌برداری از تومورهای بدن با اشعه X (X-ray)، انجیوگرافی (Angiography)، تشخیص اثر انگشت و در سایر موارد کاربرد دارد (۵، ٦).

هدف تحقیق

هدف از این تحقیق، بررسی عمل‌کرد اوپراتور لاپلاسین روی تصاویر دیجیتال در حوزه مکان هست. هم‌چنان روشن‌سازی و استخراج جزئیات کوچک تصاویر دیجیتال، هدف این تحقیق می‌باشد.

روش تحقیق

ابتدا اوپراتور لاپلاسین با استفاده از مشتقات مرتبه دوم به‌عنوان یک فیلتر که فیلتر لاپلاسین نامیده می‌شود، طراحی می‌گردد. در مرحله دوم این فیلتر در نرم‌افزار متلب برنامه‌نویسی می‌شود و باالآخره در مرحله سوم، فیلتر طراحی‌شده را روی تصویر برنج اعمال نموده و نتایج به‌دست‌آمده از اعمال فیلتر لاپلاسین و اصل تصویر را باهم مقایسه می‌نمایم.

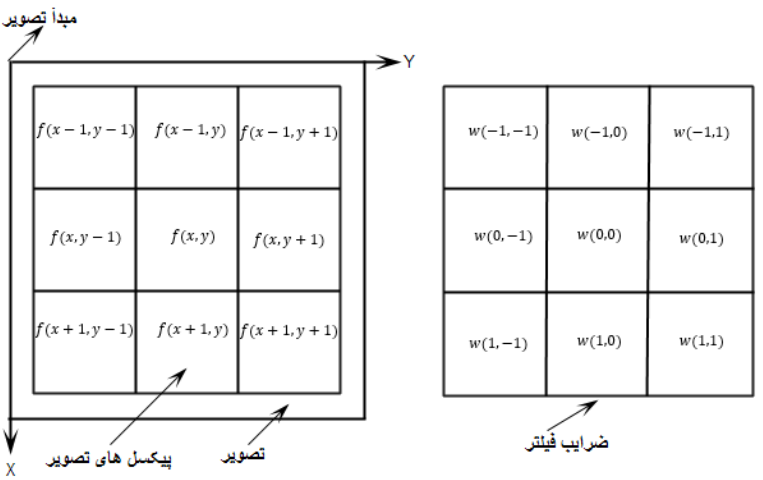
پیاده‌سازی فیلترهای خطی مکانی روی تصویر دیجیتال

روش محاسبه برای یک فیلتر ۳×۳ در شکل۱) طوری است که مجموع حاصل‌ضرب ضرایب نقاب (ماسک) در مقدار سطح روشنایی پیکسل‌های متناظر در ناحیه‌یی که توسط نقاب احاطه شده است، محاسبه می‌شود. با توجه به شکل۱(۱). که پیاده‌سازی فیلترگذاری خطی مکانی را با استفاده از یک منطقه مجاورت۳×۳ نشان می‌دهد، در هر نقطه (x,y) در تصویر پاسخ $g(x,y)$ فیلتر با مجموع حاصل‌ضرب ضرایب فیلتر و پیکسل‌های که فیلتر در برمی‌گیرد مساوی است به:

$$g(x,y) = w(-1,-1)f(x-1,y-1) + w(-1,0)f(x-1,y) + w(-1,1)f(x-1,y+1) + w(0,-1)f(x,y-1) + w(0,0)f(x,y) + w(0,1)f(x,y+1) + w(1,-1)f(x+1,y-1) + w(1,0)f(x+1,y) + w(1,1)f(x+1,y+1) \ldots . (2)$$

که در آن ضریب مرکز فیلتر (نقاب) $w(0,0)$ در امتداد پیکسل در محل (x,y) قرار دارد. برای یک نقاب به‌اندازه $m \times n$، فرض می‌شود که $m = 2a + 1$ و $n = 2b + 1$ که در آن‌ها a و b اعداد صحیح مثبت هستند. این بدان معنی است که در فیلترگذاری خطی مکانی تمرکز روی فیلترهای با اندازه‌ی تاق است که کوچک‌ترین آن‌ها ۳×۳ است. به‌طور کلی فیلترگذاری خطی مکانی یک تصویر به‌اندازه $M \times N$ با یک فیلتر به‌اندازهٔ $m \times n$ از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$g(x,y) = \sum_{s=-a}^{a} \sum_{t=-b}^{b} w(s,t) f(x+s, y+t) \ldots . (3)$$



شکل ۱: پیاده‌سازی فیلترگذاری خطی مکانی (۲)

مشتقات یک تابع دیجیتال

برای طراحی و پیاده‌سازی فیلترهای خطی مکانی نیاز است، برخی خصوصیات مشتق در حالت دیجیتال را بررسی کنیم. مشتقات یک تابع دیجیتال بر اساس تفاضل بیان می‌شود. این کار شیوه‌های متفاوتی دارد. مشتق مرتبه اول یک تابع دیجیتال باید شرایط ذیل را داشته باشد (۷):

۱. در نواحی با شدت روشنایی ثابت، صفر باشد.

۲. در شروع یک تغییر ناگهانی یا شیب در شدت روشنایی، غیر صفر باشد.

۳. در امتداد شیب، غیر صفر باشد.

به‌همین ترتیب، مشتق مرتبه دوم یک تابع دیجیتال باید شرایط ذیل را داشته باشد:

۱. در نواحی با شدت روشنایی ثابت، صفر باشد.

۲. در ابتدا، انتهای پله و شیب و شدت روشنایی، غیر صفر باشد.

۳. در امتداد شیب‌های ثابت، صفر باشد.

چون در کمیت‌های دیجیتال با مقادیر محدود سروکار داریم، لذا حداکثر میزان تغییر در شدت روشنایی نیز محدود بوده و کوتاه‌ترین فاصله که امکان رخداد چنین تغییری در آن وجود دارد، فاصله بین دو پیکسل مجاور است.

برای مشتق مرتبه اول یک تقریب در نقطه x از تابع یک‌بعدی $f(x)$ توسط سلسله تیلور تابع $f(x+\Delta x)$ حول x به‌دست می‌آید. در تصویر $\Delta x = 1$ است، یعنی به فاصله یک پیکسل‌های تصویر را داریم:

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta x \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3} + \cdots$$

$$f(x+1) = f(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3} + \cdots$$

$$\Rightarrow f(x+1) \approx f(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = f(x+1) - f(x) \ldots . (4)$$

در این جا از مشتق قسمی استفاده شده چون تصویر یک تابع دومتغیره $f(x,y)$ یا یک سیگنال دوبعدی است و برای مشتق در جهت هرکدام از محورها از مشتق قسمی استفاده می شود. واضح است زمانی‌که یک متغیر در تابع داریم: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dx}$

با مشتق‌گیری از رابطه (۴) نسبت به x مشتق مرتبه دوم $f(x)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial x} = f'(x+1) - f'(x)$$

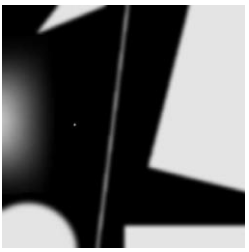
$$= f(x+2) - f(x+1) - f(x+1) + f(x)$$

$$= f(x+2) - 2f(x+1) + f(x) \ldots . (5)$$

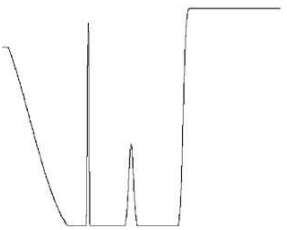
رابطه (۵) حول نقطه $x+1$ انکشاف‌یافته است. می‌خواهیم این بسط حول نقطه x باشد، بناءً، یک واحد از آرگومان کم می‌کنیم و نتیجهٔ زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(x+1) + f(x-1) - 2f(x) \ldots . (6)$$

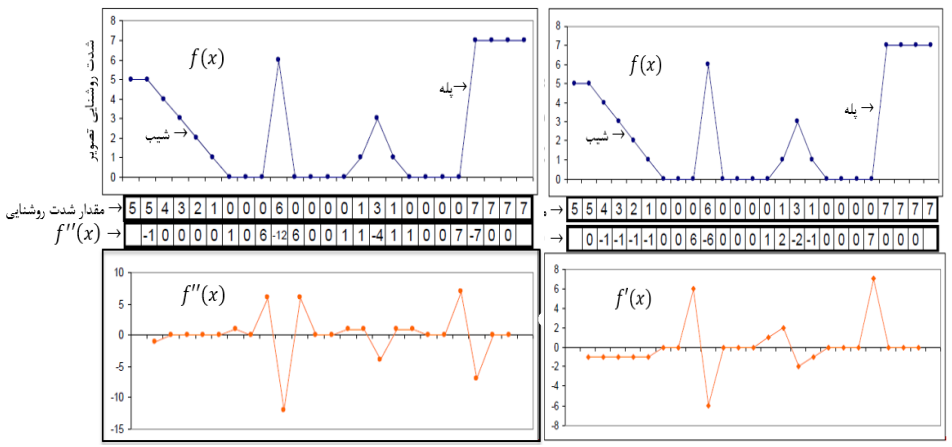
رابطه (۴) و (٦) شرایط ذکرشده برای مشتق مرتبه اول و دوم یک تابع دیجیتال را برآورده می‌سازد.



شکل ۲: (الف)



شکل ۲: (ب)



شکل ۲: (ج)

شکل ۲: (د)

شکل ۲(ج) و ۲(د): مشتقات مرتبه اول و دوم یک تابع دیجیتال یک‌بعدی، نمایش بخشی از یک پروفایل افقی شدت روشنایی یک تصویر دیجیتال (۲)

برای بررسی شباهت‌ها و تفاوت‌ها بین مشتقات مرتبه اول و دوم یک تابع دیجیتال، مثال مطرح شده در شکل ۲(۲) را در نظر می‌گیریم.

شکل ۲(۲) (الف) تصویر اصلی، شکل ۲) (ب) پروفایل شدت روشنایی افقی در طول مرکز تصویر، شکل ۲(۲) (ج) مشتقات مرتبه اول و شکل ۲) (د) مشتقات مرتبه دوم تصویر را به‌عنوان یک تابع دیجیتال نشان می‌دهد.

هنگام محاسبه مشتق اول در محل x، مقدار تابع در آن نقطه را از نقطه بعدی کم می‌کنیم. بنابراین، این عمل با مقادیر بعدی سروکار دارد. به‌طور مشابه، جهت محاسبه مشتق دوم در x، از نقاط قبلی و بعدی استفاده می‌کنیم.

لبه‌ها در پردازش تصویر دیجیتال معمولاً شبیه پرش‌های شیب، در شدت روشنایی هستند که در آن اولین مشتق تصویر منجربه لبه‌های ضخیم می شود. چراکه مشتق در امتداد شیب غیر صفر است. از سوی دیگر، مشتق دوم یک لبه دیگر باضخامت یک پیکسل ایجاد می‌کند که بین این دو لبه مقادیر صفر قرار دارد. بناءً مشتق دوم جزئیات کوچک را بسیار بهتر نسبت به مشتق اول بهبود می‌دهد. مشتقات مرتبه اول لبه‌های ضخیم و مشتقات مرتبه دوم لبه‌های باریک‌تری در تصویر ایجاد می‌کنند. این ویژگی جهت تیز کردن (Sharpening) تصاویر بسیار مهم است. هم‌چنین پیاده سازی مشتق دوم نسبت به مشتق اول بسیار آسان‌تر است. محاسبه مشتقات مرتبه اول و دوم برای هر پیکسل تصویر، استفاده از فیلترهای مکانی (نقاب) است. در ادامه به طراحی فیلتر خطی مکانی با استفاده از لاپلاسین می‌پردازیم.

طراحی فیلترها مبتنی بر لاپلاسین در حوزه مکان

فیلترهای خطی مکانی که بر اساس مشتق دوم طراحی می‌شوند، فیلترهای لاپلاسین یا فیلترهای تیزکننده‌ی تصویر نامیده می‌شود. هدف اصلی تیزسازی مشخص کردن بهتر پرش‌های شدت روشنایی است (۸). کاربردهای این نوع فیلترگذاری متفاوت است و شامل چاپ الکترونیکی، تصویر وکتوری طبی، بازرسی‌های صنعتی و هدایت خودکار در سیستم‌های نظامی می‌باشد. در پردازش تصویر حوزه مکان می‌توان از طریق متوسط‌گیری پیکسل‌ها در یک منطقه‌ی مجاورت تصویر را مات‌سازی کرد. متوسط‌گیری محلی روی تصویر باعث هموار شدن تصویر می‌شود. ازآن‌جایی‌که متوسط‌گیری مانند انتگرال‌گیری است؛ پس می‌توان نتیجه گرفت که تیز ساختن تصویر دیجیتال از طریق مشتق‌گیری در حوزه امکان‌پذیر است. و تغییرات محلی شدت روشنایی با مشتق‌گیری آشکار می‌شوند. یعنی وقتی یک تصویر تیز با انتیگرال‌گیری مات می‌شود و تیزی آن کاهش می‌یابد؛ بناءً، برعکس برای تیزسازی تصویر از مشتق استفاده می‌شود. لذا تعریف و پیاده‌سازی اوپراتورهای مشتق جهت تیزسازی تصاویر دیجیتال به اساس مشتق‌گیری دیجیتال صورت می‌گیرد. اساساً قدرت پاسخ اوپراتور مشتق‌گیری با میزان گسستگی شدت روشنایی تصویر در نقطه‌ی اعمال اوپراتور نسبت دارد. بنابراین، مشتق‌گیری از تصویر، لبه‌ها و سایر گسستگی‌ها (مانند نایز) را بهبود داده و نقاطی که شدت روشنایی آن‌ها تغییرات آهسته‌تری دارد را تضعیف می‌کند.

با استفاده از مشتق دوم جزئیات کوچک تصویر نسبت به مشتق اول بدست می‌آید. برای این کار باید تیزسازی تصویر صورت گیرد تا پرش‌های شدت روشنایی مشخص شود و در نتیجه اجزای کوچک تصویر نمایان گردد. هم‌چنان از مشتق دوم در قطعه‌بندی تصاویر هم استفاده می‌شود. بناءً، در این قسمت پیاده‌سازی مشتق مرتبه دوم دوبعدی و استفاده از آن‌ها در تیزسازی تصویر را بررسی می‌کنیم. در این روش یک فرمول گسسته برای مشتق مرتبه دوم تعریف نموده و سپس بر اساس آن یک نقاب فیلتر می‌سازیم. در این‌جا به فیلترهای ایزوتروپیک (Isotropic) توجه می‌کنیم که پاسخ شان مستقل از جهت ناپیوستگی‌های تصویری است که به آن اعمال می‌شوند. به‌عبارت‌دیگر فیلترهای ایزوتروپیک تغییرناپذیر باچرخش هستند. به این معنی که نتیجه‌ی چرخش تصویر و اعمال فیلتر با نتیجه اعمال فیلتر و چرخش حاصل، یک‌سان خواهد بود. ساده‌ترین اوپراتور مشتق‌گیری ایزوتروپیک، لاپلاسین است که برای یک تابع (تصویر) با دو متحول، $f(x,y)$، به‌صورت زیر تعریف می‌شود (۹):

$$\nabla^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \dots (7)$$

ازآنجایی‌که مشتقات با هر مرتبه‌ای عملیاتی خطی هستند، لذا لاپلاسین اوپراتوری خطی است. جهت بیان این رابطه به شکل گسسته از رابطه (٦) استفاده می‌کنیم. چون تابع تصویر یک تابع دو متحوله است، بناءً رابطه (٦) به‌شکل ذیل در جهت x بیان می‌شود:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(x+1,y) + f(x-1,y) - 2f(x,y) \dots (8)$$

به‌طور مشابه در جهت y داریم:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f(x,y+1) + f(x,y-1) - 2f(x,y) \dots (9)$$

بنابراین از سه رابطه (۹-۷) نتیجه می‌شود که لاپلاسین گسسته با دو متحول، به‌صورت زیر است (۱۰):

$$\nabla^2 f(x,y) = f(x+1,y) + f(x-1,y) + f(x,y+1) + f(x,y-1) - 4f(x,y) \dots (10)$$

0	1	0
1	−4	1
0	1	0

الف: نقاب فیلتر به‌کاررفته جهت پیاده‌سازی رابطه (۱۰).

0	−1	0
−1	4	−1
0	−1	0

ب: نقاب به‌کاررفته جهت پیاده‌سازی گسترش رابطه (۱۰) که شامل جملات قطری می‌شود.

شکل ۳: نقاب‌های لاپلاسین جهت پیاده‌سازی رابطه (۱۰)

رابطه (۱۰) را می‌توان با نقاب فیلتر در شکل ۳ که یک نتیجه ایزوتروپیک برای چرخش‌های با ۹۰ درجه به‌دست می‌دهد، پیاده‌سازی نمود. از نقاب‌های لاپلاسین شکل ۳(۳) (الف) و (ب) عملاً زیاد استفاده می‌شود. این دو نقاب از تعریف مشتق دوم به‌صورت منفی عبارات رفته در معادلات (۸) و (۹) به‌دست می‌آیند.

با اضافه کردن یک جمله در رابطه (۱۰) برای هر یک از دو جهت قطری می‌توان جهت‌های قطری را در لاپلاسین دیجیتال بدست آورد. فرم هر جمله جدید نیز همسان رابطه (۸) یا رابطه (۹) است، اما مختصات در امتداد قطرها هستند. ازآنجایی‌که هر عبارت قطری هم‌چنین شامل یک جمله $-2f(x,y)$ نیز می‌باشد؛ لذا، «مقدار کل» منفی جملات تفاضل. اینک برابر $-8f(x,y)$ می‌باشد.

1	1	1
1	−8	1
1	1	1

(الف)

−1	−1	−1
−1	8	−1
−1	−1	−1

(ب)

شکل ٤: کاربرد فیلترهای لاپلاسین در عمل (۲)

شکل ٤(۴) (الف) و (ب) دو تعریف دیگر لاپلاسین است که معمولاً در عمل به‌کار می‌روند. طوری‌که دیده می‌شود، مجموع ضرایب فیلترهای شکل‌های ۳. و ٤. مساوی به صفر است. به این مفهوم که اگر در یک نقطه تصویر قرار داشته باشیم و همه نو پیکسل در همان نقطه دارای مقادیر مساوی باشند، در این‌حالت نتیجه کانولوشن فیلترهای شکل‌های ۳. و ۴. با تصویر مساوی به خروجی صفر است. یعنی در آن نقطه تصویر تغییرات شدت روشنایی و رنگ وجود ندارد. بناءً، اگر یک نقطه تصویر دارای یک رنگ یا تغییرات رنگ نداشته باشد، در آن‌جا لاپلاسین صفر است. اگر در یک ناحیه تصویر تغییر رنگ وجود داشته باشد، در این‌حالت نتیجه اعمال فیلترهای شکل۳. و ۴. با تصویر مساوی به خروجی خلاف صفر است یعنی لاپلاسین در آن ناحیه صفر نیست. اگر پیکسل مرکزی نسبت به هشت پیکسل مجاورت خود روشن‌تر باشد، در این صورت نتیجه لاپلاسین شکل۳. الف و شکل۴. الف منفی است و اگر پیکسل مرکزی نسبت به هشت پیکسل مجاورت خود تاریک‌تر باشد، در این صورت نتیجه لاپلاسین شکل۳. الف و شکل۴. الف مثبت خواهد بود.

شکل ٤(۴) (ب) نقاب فیلتر به‌کاررفته جهت پیاده‌سازی این تعریف جدید را نمایش حاصل این نقاب با چرخش ۴۵ درجه ایزوتروپیک است.

لاپلاسین مشخص می‌کند که کدام نقاط نسبت به اطراف خود در یک تصویر تغییر روشنایی دارد. چون لاپلاسین یک اوپراتور مشتق‌گیری است؛ لذا استفاده از آن گسستگی‌های شدت روشنایی را در تصویر برجسته کرده و نواحی با سطوح شدت روشنایی با سرعت تغییر کم را تضعیف می‌کند. این امر موجب ایجاد تصاویری با لبه‌های خاکستری و گسستگی‌های دیگر روی یک پس‌زمینه بدون ویژگی سیاه می‌شود. می‌توان ویژگی‌های پس‌زمینه را ضمن حفظ اثر تیز کنندگی لاپلاسین با اضافه کردن لاپلاسین تصویر به تصویر اصلی بازیابی نمود. همان‌طور که در بالا بیان شد باید به‌خاطر داشته باشیم اگر در تعریف موردنظر مرکز نقاب منفی باشد، جهت دستیابی به تصویر تیز شده، لاپلاسین را از تصویر اصلی تفریق می‌کنیم. بنابراین راه استفاده از لاپلاسین جهت تیزسازی تصویر به‌صورت زیر است (۱۱):

$$g(x,y)=\begin{cases} f(x,y)-\nabla^2 f(x,y) & \text{اگر مرکز نقاب منفی باشد .} \\ f(x,y)+\nabla^2 f(x,y) & \text{اگر مرکز نقاب مثبت باشد .} \end{cases}$$

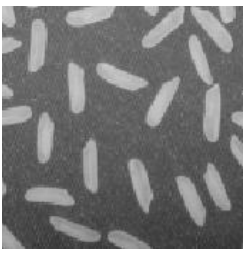
$$g(x,y)=f(x,y)+c[\nabla^2 f(x,y)] \ldots . (11)$$

که در آن $f(x,y)$ و $g(x,y)$ به‌ترتیب تصاویر ورودی تیز شده هستند. اگر از فیلترهای لاپلاسین در شکل ۳. (الف) یا شکل ٤(۴) (الف) استفاده شود، در این صورت $c=-1$ و چنان‌چه دو فیلتر دیگر مورداستفاده قرار گیرند، $c=1$ خواهد بود. یعنی اگر مرکز نقاب (فیلتر) منفی باشد، در این صورت $c=-1$ می‌باشد. تمامی این موارد را در شکل ۵(۵) بررسی می‌کنیم.

شکل ۵. (الف) یک تصویر برنج را نشان می‌دهد. شکل ۵ (ب) اثر فیلتر نمودن این تصویر با نقاب لاپلاسین شکل ۳(۳) (الف) را نمایش می‌دهد. ازآنجاکه لاپلاسین هم مقادیر مثبت و هم مقادیر منفی را در برمی‌گیرد و مقادیر منفی هنگام نمایش حذف می‌شوند و به‌جای آن‌ها صفر قرار داده می‌شود، لذا بخش زیادی از این تصویر سیاه است. شکل ۵ (ج) اثر فیلتر نمودن این تصویر با نقاب لاپلاسین شکل ۳(۳) (ب) را نمایش می‌دهد.

شکل ۵(۵) (د) اثر اعمال رابطه (۱۱) با $c=-1$ و فیلتر شکل ۳) (الف) را نمایش می‌دهد. جزئیات در این تصویر تیزتر و واضح‌تر از تصویر اصلی هستند. افزودن تصویر اصلی به لاپلاسین تغییرات کلی شدت روشنایی در تصویر را بازیابی می‌کند و تفاوت بین نواحی که دارای تغییر رنگ ناگهانی یا تغییر در شدت روشنایی دارد را افزایش می‌دهد. نتیجه به‌دست‌آمده تصویری است که در آن جزئیات کوچک بهبودیافته و میزان تغییر پس‌زمینه نیز به‌خوبی حفظ‌شده است. شکل ۵) (هـ) اثر اعمال رابطه

(۱۱) با $c = 1$ و فیلتر شکل ۳) (ب) را نشان می‌دهد. چنین نتایجی، فیلتر لاپلاسین را تبدیل به گزینه‌ای مطلوب جهت تیزسازی تصاویر دیجیتال نموده‌اند.

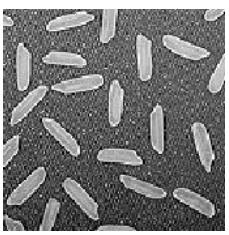


الف: تصویر اصلی

ب: نتیجه فیلتر شکل ۳. الف

ج: نتیجه فیلتر شکل ۳. ب

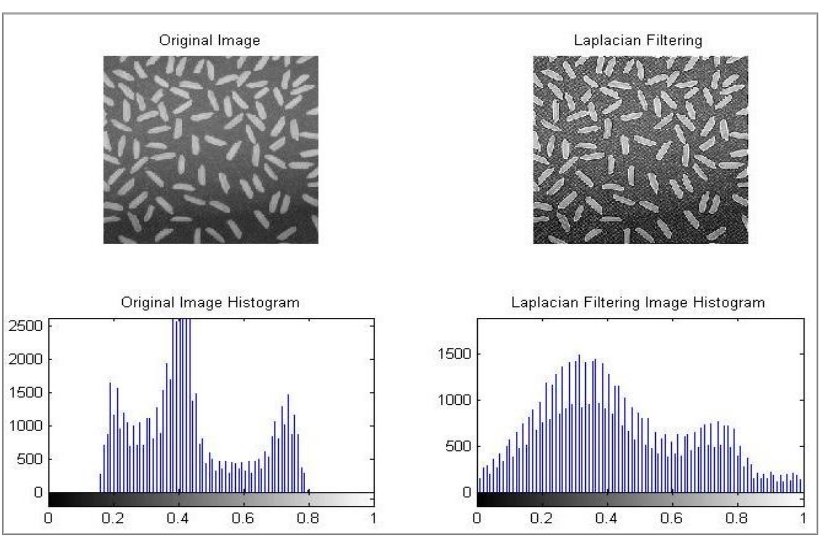
د: نتیجه فیلتر شکل۳: الف $c = -1$



هـ: نتیجه فیلتر شکل ۳: ب $c = 1$

شکل ۵: نتیجه اعمال رابطه (۱۱) روی تصویر اصلی و تصاویر شکل۳ با در نظر داشت $c = -1$ و $c = 1$ (۲)

هم‌چنان هیستوگرام تصاویر شکل ٦) نشان می‌دهد که به اثر اعمال فیلتر لاپلاسین مطابق رابطه (۱۱) که در آن $c = -1$ است، تصویر بدست آمده از اعمال فیلتر نسبت تصویر اصلی روشن‌تر است.



شکل ٦: هیستوگرام تصویر اصلی و حاصل تصویر از اثر اعمال فیلتر لاپلاسین

نتیجه‌گیری

فیلترهای خطی مکانی که بر اساس مشتق دوم طراحی می‌شوند، فیلترهای لاپلاسین نام دارد. با استفاده از این فیلترها تغییرات شدت روشنای تصویر در جهت‌های مختلف بررسی می‌گردد. فیلتر لاپلاسین با تصویر از طریق کانولوشن اعمال می‌شود. در نواحی تصویر که تغییرات رنگ وجود نداشته باشد، خروجی این فیلتر صفر است. لاپلاسین، اختلاف نواحی تصویر که دارای شدت روشنایی یا اختلاف رنگ دارند، آن‌را افزایش می‌دهد و نتیجه‌ی به‌دست‌آمده تصویری است که در آن جزئیات کوچک بهبودیافته است. چنین نتایجی، لاپلاسین را تبدیل به گزینه‌ی مطلوب جهت تیزسازی تصاویر دیجیتال نموده‌اند. این فیلترها جزئیات کوچک تصاویر را بسیار بهتر نسبت به مشتق اول بدست می‌آورند. با استفاده از لاپلاسین گسستگی‌های شدت روشنایی در تصویر برجسته و نواحی با سطوح شدت روشنایی با تغییر کم را تضعیف می‌کند. این کار سبب به میان آمدن تصاویری با لبه‌های خاکستری و گسستگی‌های دیگر روی یک پس‌زمینه بدون ویژگی سیاه می‌شود. می‌توان ویژگی‌های پس‌زمینه را ضمن حفظ اثر تیز کنندگی لاپلاسین با افزودن لاپلاسین تصویر به تصویر اصلی بازیابی نمود که افزودن تصویر اصلی به لاپلاسین تغییرات کلی شدت روشنایی در تصویر را بازیابی می‌کند. نتایج بدست‌آمده نشان می‌دهد که استفاده از فیلترهای خطی مکانی مبتنی بر لاپلاسین برای روشن کردن تصویر مفید، طراحی آن آسان و از نظر محاسبه به‌صرفه است. هیستوگرام تصاویری که از اثر اعمال فیلتر لاپلاسین بدست آمده، نشان می‌دهد که تصویر خروجی این فیلترها نسبت به تصویر اصلی روشن‌تر است.

از لاپلاسین در بهبود تصاویر دیجیتال، بدست آوردن جزئیات کوچک تصاویر، بررسی محصولات غذایی، تصویربرداری طبی، طب عدلی، تصویربرداری از رگ‌های خونی، تشخیص اثر انگشتان و یافتن خصوصیات آن‌ها، شناسایی سریال نمبرها، زمین شناسی، اکتشافات نفتی و معدنی می‌توان استفاده کرد.

منابع

(1) Vashisht M, Bhatia M, editors. Role of Mathematics in Image Processing. International Conference on Machine Learning, Big Data, Cloud and Parallel Computing (COMITCon); Feb 2019.

(2) R. C. Gonzalez, Woods RE. Digital Image Processing. United States of America: Pearson Prentice Hall; 2008. 104 p.

(3) V.C Chijindu, O. Iloanusi, Ahaneku M. Edge Detection In Images Using Haar Wavelets, Sobel, Gabor And Laplacian Filters. International Journal of Scientific & Technology Research. April 2018;7.(٤)

(4) Dharampal VM. Methods of image edge detection: A review. Journal of Electrical & Electronic Systems. 2015;4(2):5.

(5) Amer GMH, Abushaala AM, editors. Edge detection methods. 2nd World Symposium on Web Applications and Networking (WSWAN) Mar 2015: IEEE.

(6) Gudmundsson M, El-Kwae EA, Kabuka MR. Edge detection in medical images using a genetic algorithm. IEEE transactions on medical imaging. 1998;17(3):469-74.

(7) Negi SS, Gupta B, editors. Survey of various image enhancement techniques in spatial domain using MatLab .International Conference on Advances in Computer Engineering and applications-20; 2014: Citeseer.

(8) Azad M. Smoothing Sharpening and Segmentation of Image. International Journal of Engineering and Applied Sciences (IJEAS). May 2018;5.(٥)

(9) Yildirim M ,Kacar F. Adapting Laplacian based filtering in digital image processing to a retina-inspired analog image processing circuit. Analog Integrated Circuits and Signal Processing. 2019;100(3):537-45.

(10) Bouganssa I, Sbihi M, Zaim M. Laplacian Edge Detection Algorithm for Road Signal Images and FPGA Implementation. International Journal of Machine Learning and Computing. 2019;9(1):57-61.

(11) Siddiqi MH, Alsirhani A. An Ensembled Spatial Enhancement Method for Image Enhancement in Healthcare. Journal of Healthcare Engineering. Jan 2022:96.