تحقیق تجربی دربارهی قضیه محورهای غیرعمود در تعیین مومنت عطالت اجسام سخت با استفاده از رقاصهی فزیکی

پوهنوال رجب‌علی خاوری

دیپارتمنت فزیک و الکترونیک، پوهنځی فزیک، پوهنتون کابل، کابل، افغانستان
ایمیل: khavary81@gmail.com

چکیده

در محاسبه مومنت عطالت، قضیه محورهای عمود برای اجسام یک‌بعدی و دوبعدی برقـــرار اســـت. این قضیه از ابزارهای مفید برای محاسـبه مومنت عطالت اجسـام می‌باشـد. این قضـیه در باره سـه محور عمود برهم نیز برقرار می‌باشـد. روش تحقیق تجربی ذیل برای صحت آن در حالت‌های غیرعمود صورت گرفته و تجارب روی میله‌های باریک غیرعمود برهم انجام شده است. نتیجه‌ی بدست آمده نشان می‌دهد که این قضیه در حالت‌های غیرعمود نیز برقرار مـی‌باشـد. رقاصـه‌ی فـزیکی برای تحقیق تجربی پریود اهتزاز بکار گرفته شـده و هم‌چنین تیوری‌های لازم برای محاسـبه تیوریک فراهم گردیده اسـت که نتیجه‌ی آن دریافت قیمت‌ها و گراف با خطای تقریبی کم‌تر از ۱٪ در تمامی مراحل تجربه و نتیجه‌گیری می‌باشد. نتایج به دو صورت تحلیل ارقامی و تحلیل گرافیکی ارزیابی شده اسـت که در هردو مرحله تفاوت بدست آمده از خطای نسبی تجربه کم‌تر می‌باشد.

اصطلاحات کلیدی: رقاصه فزیکی؛ قضیه محورهای عمود؛ محورهای غیرعمود؛ مومنت اینرشیا؛ پریود اهتزاز؛ کثافت طولی

An Experimental Study on the Theorem of Non-Vertical Axes in Determining the Moment of Inertia of Hard Objects Using A Physical Pendulum

Associate Prof. Rajab Ali Khavari

Department of Physics and Electronics, Faculty of Physics, Kabul University, Kabul, Afghanistan
Email: khavary81@gmail.com

Abstract

In calculating momentum of inertia, the theorem of vertical axes is established for one-dimensional and two-dimensional objects. This theorem is a useful tool for calculating the moment of inertia of objects. This is also true of the three perpendicular axes. Experimental research has been done for its accuracy in non-vertical positions and experiments have been performed on narrow non-vertical bars. The result shows that this theorem also holds in non-vertical positions. Physical pendulums have been used for experimental research of the vibrating period and also the necessary theories for theoretical calculation have been provided, which result in receiving prices and graphs with an approximate error of less than%1 in all stages of experimentation and conclusion. The results are evaluated in the form of numerical analysis and graphical analysis, in both stages the difference is less than the relative error of the experience.

Keywords: Physical Pendulum; Theorem of Vertical Axes; Non-Vertical Axes; Moment of Inertia; Period of Vibration; Longitudinal Density

مقدمه

مومنت عطالت اجسام بخصوص اجسام سخت یک خاصیتی از جسم است که در برابر اعمال قوه‌ی خارجی مخالفت می‌کند و این مخالفت براساس قوانین نیوتن در جهت خلاف جهت اعمال قوه‌ی خارجی است. این خاصیت ربطی به مقاومت هوا و یا اصطکاک ندارد، بلکه تنها به‌خاصیت کتلوی جسم بستگی دارد. قضایای مومنت عطالت دورانی در کتاب‌های مختلف فزیک (1) و همین‌طور میخانیک کلاسیک (2) و انجینری میخانیک (3) آمـده است که عبارت از قضیه محـورهای موازی و محورهای متعامد می‌باشد. این قضایا کمک می‌کند تا مومنت عطالت دورانی حول محورهای دل‌خواه براساس معلومات اولیه در باره مومنت عطالت مرکزی سیستم بدست آید و محاسبه محورهای ثابت و متغیر براساس این قضایا به سادگی قابل حل می‌شود (4).

میتود رقاصه‌ی فزیکی به‌صورت گسترده توسط محققین در اندازه‌گیری مومنت عطالت دورانی اجسام استفاده شده است (5) (6). تعمیم‌دهی قضایای مومنت عطالت در بیان تیوریک توسط نویسندگان زیادی براساس مفاهیم تنزوری و ماتریکس مومنت عطالت صورت گرفته است (7, 8) در این‌جا بحث تعمیم‌دهـی قضیه محورهای متعامد به حالت کلـی سه محور براساس تجربه می‌باشد. چون دیگر محورهای x،y،z نداریم، بنابراین، از مختصات تعمیم‌یافته 1 و 2،3 استفاده مـی‌کنیم (9). گرچه از تیوری‌های پیچیده به‌خاطر بحث تقارن دوری نمودیم و با تکیه بر نتایج عملی توانستیم نتایج تیوریک خود را به ثبوت برسانیم اما می‌توان ادعا نمود در حالت کلی قضیه بر قرار است.

قضیه محورهای متعامد

طبق قضیه محورهای متعامد مومنت عطالت حول محور عمود بر دو میله عمود بر همدیگر مساوی مجموع دو مومنت است. در بیان دیگر مومنت عطالت حول محور دل‌خواه z مساوی جمع مومنت‌های عطالت حول دو محور x،y می‌باشد. این قضیه در حل بسیاری از مومنت‌های عطالت حول محورهای غیر متعارف و یا با حل ریاضیکی خیلی کم، کمک ارزنده‌یی می‌کند. به‌طور کل نتیجه تیوریک طبق شکل داریم:

$$\Delta I_x = \Delta m y^2 \text{ ، } \Delta I_y = \Delta m x^2 \text{ ، } \Delta I_z = \Delta m r^2$$
$$\rightarrow \Delta I_x + \Delta I_y = \Delta m(x^2 + y^2) = \Delta m r^2 = \Delta I_z$$

در تحلیل تیوریکی موضوع مومنت عطالت حول محور عمود بر یک رأس میله مساوی با $\frac{1}{3}ml^2$ است، اما اگر دو میله باهم زاویه بسازد و حول محور عمود بر نقطه مشترک آن‌ها دوران کند، مومنت عطالت سیستم و پریود اهتزازات آن به‌صورت ذیل قابل حصول است (2).

هرگاه مومنت عطالت یک جسم حول محورهای متعامد $x.y$ معلوم باشد، مومنت عطالت حول محور y به‌صورت ذیل بدست می‌آید:

$$I_z = I_1 + I_2$$

فورم کلی بیان فوق که به قضیه سه محور موسوم است، به‌صورت ذیل می‌باشد:

$$I_1 + I_2 = I_3$$

تحلیل ریاضیکی مسأله شامل بررسی تنزوری مومنت عطالت و در نظرگیری محورهای اساسی و قضیه ضرب مومنت‌ها می‌باشد که در این بحث شامل نمی‌باشد.

برای بررسی ساده قضیه سه محور و تعمیم‌دهی قضیه محورهای متعامد به حالت عمومی غیر متعامد که تعامد یک حالت خاص آن می‌باشد، از محاسبه مومنت عطالت یک میله حول محور غیر عمود بر رأس آن آغاز می‌کنیم.

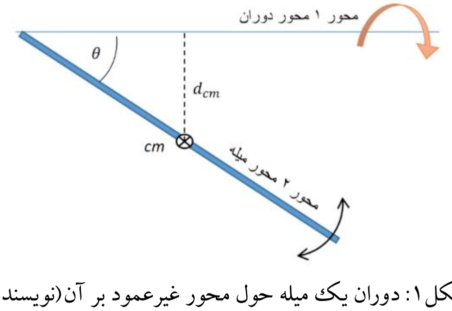
مومنت عطالت یک میله حول محور غیرعمود بر رأس آن

از کتاب‌های فزیک می‌دانیم که مومنت عطالت یک میله به‌طول l و کتله m مومنت عطالت حول یک محور عمود بر رأس آن به‌صورت $I = \frac{1}{3}ml_1^2$ است. در بیان کثافت خطی میله این بیان به‌صورت $I = \frac{1}{3}\lambda l_1^3$ می‌گردد. حال سؤال این‌جاست که برای محور غیر عمود بر رأس یک میله مومنت عطالت چگونه محاسبه می‌گردد. برای محور غیر عمود بر یک رأس میله باریک طبق شکل یک عنصر طول با مشخصات dl، dm را در نظر می‌گیریم که از محور دوران فاصله r دارد. برای میله باریک و یک‌نواخت طبق تعریف مومنت عطالت داریم:

$$I = \int r^2 dm = \int (l\sin\theta_1)^2 dm = \int_0^l \lambda (l\sin\theta_1)^2 dl$$
$$\rightarrow I = \lambda(\sin\theta_1)^2 \int_0^l l^2 dl = \frac{1}{3}\lambda l^3 sin^2\theta$$

هرگاه پریود اهتزازت رقاصه‌ی فزیکی را درنظر بگیریم مومنت عطالت براساس آن عبارت است از:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd_{cm}}} \rightarrow I = \frac{mgd_{cm}T^2}{4\pi^2} = \frac{mglsin\,\theta\, T^2}{8\pi^2} \qquad (۱)$$



شکل ۱: دوران یک میله حول محور غیرعمود بر آن (نویسنده)

دو نتیجه برای مومنت عطالت میله یکی از تیوری و دیگری از تجربه که باید مساوی باشند. در صورت مساوی بودن، نتیجه‌ی تیوری که همان مومنت عطالت میله حول محور غیر عمود است، تأیید مــی‌گردد.

در مرحله بعد فرض مـی‌گـردد که دو میله با زاویه‌ی بین غیر ۹۰ درجه از یک رأس با همدیگـر ملحق شده باشد. مومنت عطـالت سیستم حول محور عمود بر رأس آن، به‌مومنت عطـالت دو میله و فاصله مــرکز ثقل از محور دوران بستگــی دارد. در ابتدا حــالتی را در نظــر مــی‌گیریم که محور دوران بر رأس مشترک عمود بوده و زاویه بین دو میله از صفـر تا ۹۰ درجه تغیـیر نماید. طبق تعـریف رقاصه‌ی فـــزیکی مقدار پریود رقاصه به‌صورت $T = 2\pi\sqrt{I/mgd_{cm}}$ می‌باشد که در آن $I = I_1 + I_2$ مومنت عطالت هـریک از میله‌ها حول رأس عمـود است و مقدارش همـان $\frac{1}{3}ml^2$ مـی‌باشد. برای دریافت فاصله مـرکز ثقل دو میله از محور دوران از قضیه کوساین‌هـا در جمع ویکتورهـا مـی‌دانیم که محصله دو ویکتور به طــول l_1، l_2 و زاویه بین θ عبــارت است از:

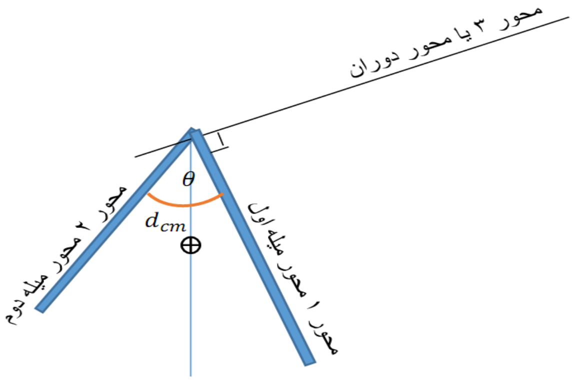
$$R = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2cos\theta}$$

بنابراین، برای دو میله باریک با رأس مشترک غیر عمود هـرگاه محور دوران مشـترک عمود را درنظـر بگیریم، پریود اهتزازت سیستم طبق تعــریف کلـی برای رقاصه فـزیکی عـبارت است از:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd_{cm}}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_1+I_2}{mgd_{cm}}} \qquad (۲)$$

که d_{cm} فاصله مرکز ثقل سیستم از نقطه تعلیق یا محور دوران است. m کتله سیتم تحت اثر اهتـــزاز مــــی‌با شد و I مومنت عطالت کلی سیستم ا ست. مقـــــدار I میتواند برا ساس قضیه جمع مومنت‌ها به‌صورت $I_1 + I_2 = I_3$ بیان گردد.

در قضیه محورهای عمود محورهــــای دوران سه‌گانه سیستم برهم عمود می‌با شد. اما حال دو محور ۱و۲ در نقطه اتصــال غیرعمود اســت، ولی دیده می‌شـود که قضـیه‌ی محورهای عمود با اعمال کمی تغییرات و ملاحظات در مورد محورهای غیرعمود نیز قابل تطبیق است. از طــرفی مـــی‌دانیم که برای دو میله با رأس مشترک همانند یک متوازی‌الاضلاع، مـرکز ثقل روی قطـر آن می‌تواند در نظـر گـرفته شود که در فاصله ¼ از رأس مشتـرک قـرار دارد.



شکل ۲: دوران دو میله غیر عمود حول محور عمود برهردو(نویسنده)

بنابراین، در حالت دو میله با رأس مشترک، مرکز ثقل روی قطر عبور نموده و در فاصله ¼ از رأس مشترک قرار دارد (1). با این بیان رابطه (۲) به‌صورت ذیل ساده مـی‌گردد:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}\lambda_1 l_1^3+\frac{1}{3}\lambda_2 l_2^3}{\frac{mgR}{4}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{\lambda}{3}(l_1^3+l_2^3)}{\frac{\lambda(l_1+l_2)g\sqrt{l_1^2+l_2^2+2l_1l_2cos\theta}}{4}}}$$

$$\rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{4(l_1^3+l_2^3)}{3(l_1+l_2)g\sqrt{l_1^2+l_2^2+2l_1l_2cos\theta}}} \qquad (3)$$

این نتیجه که براساس مفهوم رقاصه‌ی فزیکی و قضیه جمع مومنت‌ها و همین‌طور قضیه محورهای موازی در مومنت عطالت اجسام بدست آمده است.

هرگاه دو میله هم‌طول باشد، معادله فوق به‌صورت ذیل ساده می‌گردد و یک تابع از زاویه و پریود بدست می‌آید.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{8(l^3)}{6(l)g\sqrt{2(l^2+l^2cos\theta)}}} = 2\pi\sqrt{\frac{8\pi}{6\pi\sqrt{2(1+cos\theta)}}}$$

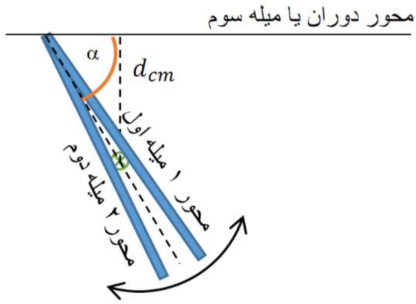
$$\rightarrow 1+cos\theta = \left(\frac{16\,\pi\,l}{3\sqrt{2}gT^2}\right)^2$$

$$\rightarrow \frac{1}{T^4} = A(1+cos\,\theta) \qquad (۴)$$

که A یک ثابت می‌باشد. گراف تغییرات $\frac{1}{T^4}$ به تابع $1+cos\,\theta$ یک تابع خطی با میل ثابت می‌باشد. حال مسأله قضیه محورهای متعامد را به حالت کلی سه محور غیر متعامد تعمیم می‌دهیم.

سه محور 3،2،1 را من‌حیث محورهای دوران سیستم درنظر بگیرید. در این‌جا تحلیل را براساس سه میله‌ی غیر عمود برهم درنظر می‌گیریم. این‌حالت با حالت‌های قبلی فرقی ندارد و تنها شرط فاصله

مرکز ثقل تا نقطه دوران یا تعلیق برای هرحالت و هم‌چنین زاویه اضلاع نسبت به‌هم فرق می‌کند. در این‌جا کلیت مسأله از دید تیوری بررسی گردیده و با تجربه مورد تأیید قرار می‌گیرد.



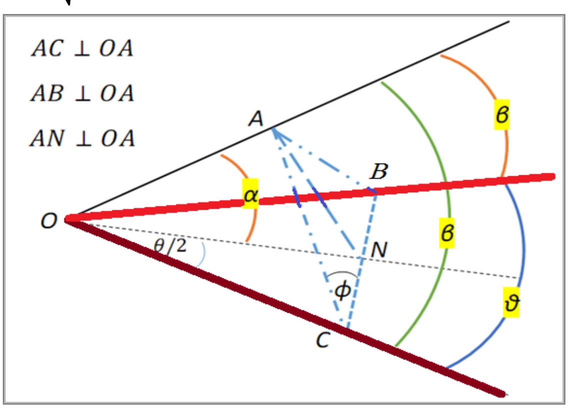
شکل ۳: دوران دو میله غیر عمود برهم حول محور غیر عمود (نویسنده)

برای ساده‌گی دو میله هم‌جنس و هم‌طول را در نظر می‌گیریم که با هم زاویه θ می‌سازد. میله سوم (میله محور دوران) که با مستوی دو میله زاویه α می‌سازد تنها من‌حیث محور دوران حساب می‌گردد و در محاسبه مومنت عطالت، کتله و غیره نقشی ندارد. هرگاه میله‌ها غیر هم‌طول و یا غیر هم‌جنس باشد، خطی که مرکز ثقل در آن قرار دارد نسبت به دو میله متقارن نیست و بنابراین، زاویه بین محور و هر میله نیز فرق می‌کند. رابطه پریود اهتزازات دومیله غیر عمود بر یک محور دوران غیرعمود از مفهوم رقاصه فزیکی به‌صورت ذیل است:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{\lambda}{3}(l_1^3+l_2^3)}{\frac{mgR}{4}\sin\alpha}} = 2\pi\sqrt{\frac{4(l_1^3+l_2^3)}{(l_1+l_2)g\sqrt{l_1^2+l_2^2+2l_1l_2\cos\theta}\,\sin\alpha}} = 3\pi\sqrt{\frac{4(l_1^2+l_2^2-l_1l_2)}{3g\sqrt{l_1^2+l_2^2+2l_1l_2\cos\theta}\,\sin\alpha}}$$

برای حالت دومیله هم‌طول معادله کمی ساده‌تر می‌گردد:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{8\,\pi}{6\,\pi\sqrt{2(1+\cos\theta)}\,\sin\alpha}} \qquad (5)$$



شکل ۴: بررسی ترسیمی سه محور غیر عمود برهم OA و OB و OC برحسب طول و زوایا (نویسنده)

برای دریافت ارتباط زاویه الفا با طول و زاویه هر میله با محور دوران در شروع شکل (۴) را درنظر می‌گیریم که در آن میله‌ها هم‌جنس و هم‌اندازه و هم‌قطر هستند، پس به‌علت تقارن نقطه مرکز ثقل روی خط تقارن قرار می‌گیرد. مستوی ABC بر محور OA عمود است. بنابراین، خط تقارن ON نیز در این مستوی قرار دارد. از قضایای هندسی و روابط مثلثاتی داریم:

$$\tan\alpha = \frac{AN}{OA} \text{ ، } \tan\beta = \frac{AC}{OA} \rightarrow \tan\alpha = \frac{AN}{AC}\tan\beta \text{ ، } \sin\varphi = \frac{AN}{AC}$$

$$\rightarrow\ tan\alpha = \sin\varphi\cdot\tan\beta$$

$$tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{CN}{ON} \text{ ، } \sin\alpha = \frac{AN}{ON} \rightarrow tan\ \varphi = \frac{AN}{CN} = \frac{\sin\alpha}{tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{1+cotg^2\ \varphi}$$

$$\rightarrow \tan^2\alpha = \sin^2\varphi\tan^2\beta = \frac{1}{1+cotg^2\ \varphi}\tan^2\beta = \frac{1}{1+\frac{tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\alpha}}\tan^2\beta$$

$$\tan^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \frac{1}{1+\frac{\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\alpha}}\tan^2\beta$$

$$\sin^2\alpha + \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \tan^2\beta - \sin^2\alpha\tan^2\beta$$

با ساده‌سازی داریم:

$$\sin^2\alpha = \frac{\left(\tan^2\beta - \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}{1+\tan^2\beta} \rightarrow \sin\alpha = \sqrt{\frac{\left(\tan^2\beta - \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}{1+\tan^2\beta}} \qquad (6)$$

ملاحظه می‌گردد که شرط تقارن مسأله ساده‌تر ساخته شده است؛ اما کلیت مسأله و این‌که قضیه محورهای عمود برای محورهای غیر عمود هم برقرار است، معتبر می‌باشد.

ترتیب عملی

برای دریافت عملی پریود اهتزاز در هر حالت از سیستم تایمر نوری استفاده شده است که دقت ۰,۰۰۱ثانیه را دارد. میله‌ها به‌صورت انفرادی و یا جفت شده حول محور افقی دوران داده می‌شود تا از شرط اهتزاز رقاصه‌ی فزیکی و شمارش پریود اهتزاز برای بررسی و مقایسه‌ی زمان‌های پریود تیوری و عملی استفاده گردد.

برای افزایش دقت و تقلیل اصطکاک محورهای دوران روی دو چاقو که تراز افقی شده است، قرار می‌گیرد. عملیه اندازه‌گیری زاویه با نقاله با دقت ۱ درجه اندازه می‌گردد و ترتیب انجام طبق شکل‌های متن صورت گرفته است.

نتایج

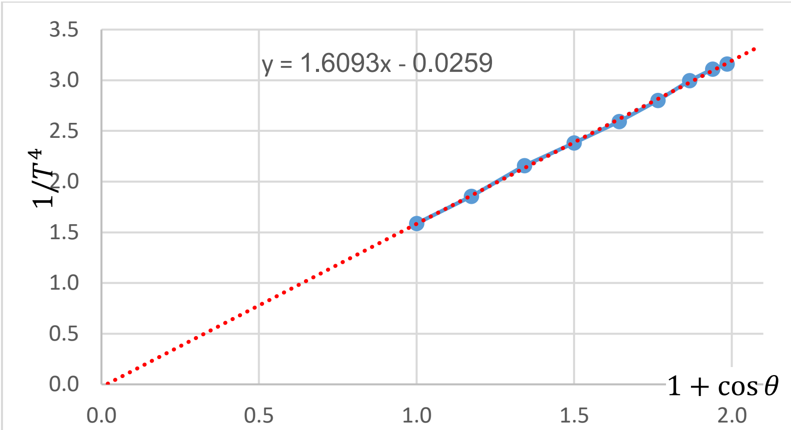
در اندازه‌گیری اول درست رابطه بیان‌کننده‌ی مومنت عطالت حول محور غیر عمود بر رأس میله بررسی می‌گردد و در تمام مراحل رقاصه‌ی فزیکی من‌حیث روش اندازه‌گیری می‌باشد. میله باریک (سیم به قطر 2mm) از زاویه ۱۰ تا ۹۰ درجه حول یک محور افقی به‌صورت رقاصه‌ی فزیکی اهتزاز می‌کند. در هر مرحله پریود اهتزاز بدست آمده و نتیجه در جدول ۱درج شده است.

جدول ۱: دیتای تجربه با میله غیرعمود بر محور دوران (نویسنده)

شماره	زاویه (درجه)	زاویه (رادیان)	دوران (ثانیه)	$I=\frac{1}{3}\lambda l^3\sin^2\theta$	$I=\frac{\lambda g l^2\sin\theta\, T^2}{8\,\pi^2}$	اختلاف دو مقدار	فیصدی خطای نسبی
۱	۲۰	۰,۳۴۹	۰,۵۲۴	۲۷۳,۸٦۹	۲٦۹,۳۰۱	۴,۵٦۸	۱,٦۹٦
۲	۳۰	۰,۵۲۳	۰,٦۳٦	۵۸۵,۳۰۱	۵۷۹,۹۷۳	۵,۳۲۸	۰,۹۱۹
۳	۴۰	۰,٦۹۸	۰,۷۷۲	۹٦۷,۳۳	۹٦۰,۸۷۲	٦,۴۵۸	۰,٦۷۲
۴	۵۰	۰,۸۷۲	۰,۷۹۳	۱۳۷۳,۸۷۵	۱۳۸۱,۴۱۴	۷,۵۳۹	۰,۵۴٦
۵	٦۰	۱,۰۴۷	۰,۸۴	۱۷۵۵,۹۰۴	۱۷۵۲,۳۱۷	۳,۵۸۷	۰,۲۰۵
٦	۷۰	۱,۲۲۱	۰,۸۷۸	۲۰٦۷,۳۳٦	۲۰۷۷,۲۹٦	۹,٦۹	۰,۴۷۹
۷	۸۰	۱,۳۹٦	۰,۸۹۸	۲۲۷۰,٦۰۹	۲۲۷۷,۳۳۹	٦,۷۳	۰,۲۹٦
۸	۹۰	۱,۵۷	۰,۹۰۵	۲۳۴۱,۲۰۵	۲۳۴۸,٦٦۳	۷,۴۵۸	۰,۳۱۸

میزان فیصدی خطای نسبی کم‌تر از دقت سامان‌آلات تجربه و محاسبه است. لذا نتیجه گرفته می‌شود که میتود تیوریک برای دریافت مومنت عطالت میله باریک درست می‌باشد. زاویه با یک زاویه‌سنج با دقت ۱ درجه و طول با دقت میلی‌متر اندازه شده است. برای دقت بیشتر در اندازه‌گیری زمان در هر مرحله تجربه سه بار تکرار گردیده است.

در قسمت دوم، دو میله با اتصال در رأس مشترک غیرعمود حول یک محور افقی عمود بر هردو اندازه‌گیری می‌گردد که نتیجه برای دو میله هم‌طول بر طبق رابطه (۴) باید خطی باشد. براساس دیتای بدست آمده گراف ذیل حاصل شده است که یک گراف خطی عبور نموده از مبدأ را نشان می‌دهد.



شکل ۵: گراف تغییرات عکس توآن‌چهارم پریود به تابع کوساین زاویه (نوینسده)

جدول ۲: دیتای تغییرات قیمت‌های زوایا و مقایسه ان با قیمت محاسبه شده (نوینسده)

فیصدی خطای نسبی	اختلاف دو مقدار	$\alpha = \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{\left(\tan^2\beta - \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}{1+\tan^2\beta}}\right)$	الفا (زاویه بین محور و خط مرکز ثقل)	بتا (زاویه بین محور و ضلع)	تتا(زاویه بین دو محور قاعده)	شماره
۴,۹۴۸	۰,۹۳۷	۱۸,۹۳۷	۱۸	۳۵		۱
۰,۴۵۴	۰,۰۹۵	۲۰,۹۰۵	۲۱	۳٦		۲
۰,۷۰۵	۰,۱۹٦	۲۷.۸۰۴	۲۸	۴۰		۳
۱,۳۹۱	۰,۰۴۷	۳۸,۰۴۷	۳۸	۴۷		۴
۱,۳۹۱	۰,۷۲۷	۵۲.۲۷۳	۵۳	۵۸	۱	۵
۰,۱۳۷	۰,۰۹۵	٦۹,۰۹۵	٦۹	۷۲		٦
۱,۷۷۴	۱,۵۳۵	۸٦,۵۳۵	۸۵	٦۷		۷
۱,۱۱۱	۱	۹۰	۸۹	۹۰		۸
۲,۷۸۸	۱,۴۹۲	۵۳,۵۰۸	۵۵	۵۹		۹

مقدار خطا در نتیجه به‌صورت مقدار ثابت در معادله ظاهر شده است که مربوط به خطا در اندازه‌گیری زاویه، طول و زمان می‌باشد. هم‌چنین این نتیجه بیان می‌دارد که تحلیل ارائه شده درست بوده و در این‌حالت قضیه محورهای غیر عمود می‌تواند برحسب قضیه محورهای عمود توصیف گردد، زیرا هر یک از میله‌ها حول محور عمود بر محور دوران جدید دوران داده شده بود.

با توجه به وسیله‌ی اندازه‌کننده زاویه با دقت ۱ درجه میزان انحراف در زاویه بتا ۳۵ و یا الفا ۱۸ درجه رخ می‌دهد. در قسمت آخر عملیه اندازه‌گیری پریود اهتزاز برای حالتی‌که دو میله غیر عمود در یک رأس با محور دوران زاویه غیر قائم می‌باشد، صورت می‌گیرد. برای ساده‌گی میله‌های ۱و۲ هم‌طول تعیین می‌شود.

جدول۳: دیتای قیمت‌های زاوایا و پریود و مقایسه آن با قیمت تیوریک (نویسنده)

شماره	تتا(زاویه بین دو محور قاعده)	بتا (زاویه بین محور و ضلع)	الفا (زاویه بین محور و خط مرکز ثقل)	پریود عملی	$T = 2\pi\sqrt{\frac{8\pi}{6\pi\sqrt{2(1+cos\theta)}\,sin\,\alpha}}$	فیصدی خطای دو پریود
۱		۳۵	۱۸	۰,۸۵۱	۰,۸۵٦	۰,۵۸۴
۲		۳٦	۲۱	۰,۷۹	۰,۷۹۲	۰,۲۵۲
۳		۴۰	۲۸	۰,۷٦۲	۰,۷۵۷	۰,٦٦
۴		۴۷	۳۸	۰,۷۴٦	۰,۷۵۲	۰,۷۹۸
۵	٦۰	۵۸	۵۳	۰,۷٦۵	۰,۷٦٦	۰,۱۳۱
٦		۷۲	٦۹	۰,۷۹۷	۰,۷۹۴	۰,۳۷۸
۷		۸۷	۸۵	۰,۸۱	۰,۸۰۷	۰,۳۷۲
۸		۹۰	۸۹	۰,۸۱۱	۰,۸۰۷	۰,۴۹٦
۹		۵۹	۵۵	۰,۷۷۲	۰,۷٦۴	۱,۰۴۷

ملاحظه می‌گردد که اختلاف در میزان دو پریود تیوریک و عملی ناچیز بوده و با دقت زیاد درستی نتیجه تیوریک تأیید می‌گردد. هم‌چنین این نتیجه به درستی تطبیق قضیه محورهای غیر موازی یا عام در مورد اجسام خطی اشاره دارد که حالت عمود یکی از حالت‌های خاص آن می‌باشد.

قضیه محورهای عمود به حالت‌های سه‌بعدی برقرار نیست؛ بنابراین، با اجسام دوبعدی سروکار نداریم.

نتیجه‌گیری

قضیه محورهای عمود برای اجسام خطی مثل میله می‌تواند به قضیه محورهای غیرعمود منجر گردد، تنها باید مرکز ثقل و فاصله‌ی آن معلوم باشد. چون در سه بعد قضیه محورهای عمود برقرار نیست، پس عملیه‌ی اندازه‌گیری با اجسام دوبعدی صورت نگرفته است. رقاصه‌ی فزیکی یک وسیله‌ی بسیار پرکاربرد می‌باشد که می‌تواند تجارب خیلی مفید را ارائه دهد. امکان انکشاف تجربه به میله‌های غیر هم‌طول وجود دارد. میزان خطا در نتایج کم‌تر از میزان استندرد و هم‌چنین خطای وسایل اندازه‌گیری است.

پیشنهادات

از رقاصه‌ی فزیکی می‌توان در تحقیقات زیادی بهره برد که بهتر است، در لابراتوارهای فزیک و انجینری استفاده اعظمی صورت گیرد.

منابع

(1) Walker J. Halliday & Resnick Fundamentals of Physics. 9th Ed.: John Wiley & Sons, Inc.; 2011.

(2) Fowles Gr, Cassiday Gl. Analatical Mechanics: Thomson Learning / Brooks/Cole; 2004.

(3) Hibbeler Rc. Engineering Mechanics Statics. 14th Ed. R. C. Hibbeler: Pearson; 2016.

(4) Baker Gl, Blackburn Ja. The Pendulum: A Case Study In Physics: Oxford University Press; 2008.

(5) Cristiano Kl, Triana Da, Ortiz R, Pico M, Stupinan Af. Analytical And Experimental Determination of Gravity And Moment of Inertia Using a Physical Pendulum. In Iop Conference Series1386 , 012139; 2019.

(6) Richardson Th, Brittle Sa. Physical Pendulum Experiments To Enhance The Understanding of Moments of Inertia and Simple Harmonic Motion. Phys Ics Educat Ion. 2012; 47(5): 537-544.

(7) Mackelvey Jp. A Generalization of The Perpendicular Axis Theorem for the Rotational Inertia of Rigid Bodies. Amjph. 1983; 51(7): 658-660.

(8) Abduljhany Ra. Generalization of Parallel Axis Theorem for Rotational Inertia. Amjph. 2017; 85(10): 791-795.

(9) Bernard R, Zhe Wy. Three-Axis Theorem In Moment of Inertia Computation. World Scientific Publishing Company. 2020; 2(3).