کاربرد و معادل‌های اصل انتخاب

پوهنیار سیدنسیم سیاوش[۲۵]
تقریظ‌دهنده: پوهاند خالقداد فیروزکوهی

مجله‌ی علمی-تحقیقی حوزه‌ی علوم
طبیعی پوهنتون کابل، ۲ (٤) ۱٤۰۰

چکیده

در این مقاله اصل انتخاب و اصول دیگر معادل آن را بررسی می‌کنیم. به این موضوع خواهیم پرداخت که خیلی از نتیجه‌گیری‌های ریاضی که تا سال‌ها واضح و آشکارا فرض می‌شد، بر اساس اصل انتخاب، قابل بیان است. انتخاب ده عدد (لازم نیست غیر مساوی باشند) از ده جعبه‌ی کاری ساده و ابتدایی است. این انتخاب وقتی‌که تعداد انتخاب‌ها نامتناهی است، ممکن است واضح نباشد. همه‌ی مفاهیم فوق، گرد اصل به نام اصل انتخاب می‌چرخد. در این مقاله، اصول معادل اصل انتخاب را با اثبات دقیق ارائه و هم چنان چند قضیه‌ی مهم مربوط به قسمت‌های دیگر ریاضی را به کمک اصل انتخاب و معادل‌های آن اثبات می‌کنیم.

اصطلاحات کلیدی: اصل انتخاب؛ لیمای توکی؛ اصل ماکزیمالیتی‌هاسدورف؛ لیمای زرن؛ زنجیر

Application and Equivalents of the Axiom of Choice

Jr. Teaching Asstt. Sayed Nasim Siawash

Abstract

In this article, we examine the Axiom of choice and other equivalent principles. We will deal with the fact that many of the mathematical conclusions that were taken for granted for years can be expressed on the basis of the principle of choice. Choosing ten numbers (they do not have to be unequal) from ten boxes is simple and basic. This choice may not be obvious when the number of choices is infinite. All of the above concepts revolve around the principle called the Axiom of choice. In this article, we present the principles equivalent to the principle of choice with precise proof. We also prove some important theorems related to other parts of mathematics with the help of the principle of choice and its equivalents.

Keywords**:** The Axiom of choice; Tukey’s Lemma; Hausdorff Maximality Principle; Zorn’s Lemma; chain

ارجاع

سیاوش، سیدنسیم. (۱٤۰۰). کاربرد و معادل‌های اصل انتخاب. مجله‌ی علمی- تحقیقی حوزه‌ی علوم طبیعی پوهنتون کابل، شماره ۲ (٤)، صص ۳۱۹ – ۳۳۲.

---

[۲۵] استاد پوهنځی ریاضیات، پوهنتون کابل

مقدمه

اصل انتخاب یکی از اصول اساسی و مهم است که یک تعداد زیاد از نتایج ریا ضی بر اساس آن قابل بیان می‌باشد. برای بیان دقیق مسأله، فرض کنیم n ست غیرخالی A_1، A_2، ... و A_n مفروض هستند. می‌خواهیم ست A را چنان بیابیم که، $A_1 \cap A \neq \emptyset$، $A_2 \cap A \neq \emptyset$، ... و

$A_n \cap A \neq \emptyset$. این کار به طرق مختلف امکان‌پذیر است. حال یک روش را ارائه می‌دهیم. چون $A_1 \neq \emptyset$، ما $a_1 \in A_1$ را اختیاری انتخاب می‌کنیم.

اگر $a_1 \in A_2$ آن‌گاه ، $a_2 = a_1$. اگر $a_1 \notin A_2$ باشد، در این صورت مانند قبل، $a_2 \in A_2$ انتخاب می‌شود. این روش را به استقراء تکرار می‌کنیم و ست A را به‌صورت $\{a_1 , a_2 , \dots , a_n\}$ درنظر می‌گیریم. روشن است که A شرایط خواسته شده را دارد.

در روش دوم، $a_i \in A_i$ برای $i = 1,2, \dots n$ به طور اختیاری انتخاب می‌نماییم. در روش اول ممکن است ست کوچک‌تری به دست آید. حال فرض کنیم ترادف ست‌های غیر خالی $\{A_n\}_{n\in N}$ داده شده و ست A با شرایط قبل مطلوب باشد. در این‌جا هم مشکلی موجود نیست، کافی است اول $a_1 \in A_1$ انتخاب شود. در مرحله‌ی دوم $a_2 \in A_2$ را گزینش کرده، این کار را ادامه می‌دهیم . به نظر می‌رسد ست A به دست می‌آید . تنها مشکل آن است که تعداد عمل‌ها نامتناهی است. حال فرض کنیم که فامیل غیرخالی از ست‌های غیرخالی A_q را برای هر $q \in \mathbb{Q}$ داده باشد. در این حالت از روش قبل نمی‌توان استفاده کرد، چرا که اول کدام عنصر از کدام ست انتخاب شود. اما این جا هم می‌توان به روش دیگری (استفاده از نمایش اعداد ناطق به صورت کسرهای فری)، مسأله را حل کرد. این روش برای فامیل $(A_r)_{r\in R}$ کاربردی ندارد، اما به نظر می‌رسد که یافتن ست A بدیهی است. هدف در این جا این است که برای حالات مانند حالت اخیر، زبان منطق مشترکی ارائه گردد.

پیشینه‌ی موضوع

در اوایل دهه‌ی ۱۸۸۰، گئورگ کانتور تلویحاً استدلال‌های در اثبات بعضی قضایا به‌کار برده بود که اساساً معادل با اصل انتخاب بودند اما او توجه نداشت که یک اصل مو ضوع قوی جدیدی به کار می‌برد. در ۱۹۰٤، ارنست تسرملو (۱۹۵۳ — ۱۸۷۱) بعداز مطالعات دقیق، اصل انتخاب را صریحاً عنوان کرد و آن در اثبات قضیه‌ی خوش‌ترتیبی استفاده کرد. چون برای خوش‌ترتیب کردن حتی ست معروف اعداد حقیقی هیچ راهی پیدا نشده است، علی‌رغم حکم قضیه‌ی خوش‌ترتیبی، تا مدت حد اقل شش سال بعد از ظهور این قضیه، مقالات انتقادی زیادی در باره‌ی برهان تسرملو نوشته شد. اکثراً اصل انتخاب را رد کردند. با این‌حال اکثر منتقدین باید می‌پذیرفتند که اگر اصل موضوع انتخاب

را قبول می‌کردند، نمی‌توانستند اشتباهی در برهان تسرملو برای قضیه‌ی خوش‌ترتیبی بیابند، بنابراین، انتقاد از قضیه‌ی خوش‌ترتیبی به انتقاد از اصل انتخاب منجر می‌شد. به‌نظر می‌رسید که فقط دو راه وجود دارد:

الف. اصل را براین بگذاریم که تنها نتیجه‌های ساخته‌شدنی را بپذیریم و نتیجه‌های وجودی محض را نپذیریم، آن‌گاه روش‌ها و عرصه‌های ریاضیات آن‌قدر محدود می‌شوند که خارج از حساب، تنها زمینه‌های بسیار کوچکی را می‌توان بررسی کرد.

ب. نتیجه‌های ساخته‌شدنی و وجودی محض از جمله اصل موضوع انتخاب، را بپذیریم و در نتیجه، به حل مسایل بیشتر و توسعه دادن ریا ضیات بپردازیم. برای این که بتوان مشخص کرد که پیروی از کدام روش عاقلانه است، باید قبلاً به دو سؤال مشکل زیر توجه شود:

۱. آیا اصل انتخاب از اصول مو ضوع موجود مستقل است، یا به وسیله‌ی دیگر اصول مو ضوع موجود ریاضی ثابت می‌شود؟

۲. آیا اصل انتخاب با دیگر اصول کلاسیک ریا ضی سازگار است یا ممکن است افزودن اصل انتخاب به دیگر اصول موضوع کلاسیک ریاضی، موجب به وجود آمدن تناقض شود؟

ریا ضی‌دانان زیادی برای رسیدن به جواب‌های این دو سؤال کوشش فراوان نمودند. چندین سال بعد، در ۱۹۳۸، کورت گودل (۱۹۰٦) با اثبات این‌که افزودن اصل مو ضوع انتخاب به دیگر اصول مو ضوع موجود ریا ضی هیچ تناقضی ایجاد نمی‌کند، به سؤال دوم جواب داد. کشف گودل، به جامعه‌ی ریا ضی و به خصوص به استفاده‌کنندگان از اصل مو ضوع انتخاب، اطمینان زیادی داد. اما تحقیق برای پاسخ به سؤال اول هم‌چنان ادامه یافت. باالاخره، در ۱۹٦۳، پل کوهن کاملاً به سؤال جواب داد. او ثابت کرد که اصل موضوع انتخاب در حقیقت از دیگر اصول موضوع موجود، مستقل است. به عبارت دیگر، اصل مو ضوع انتخاب را نمی‌توان به عنوان یک قضیه با استفاده از اصول مو ضوع کلاسیک ریاضی ثابت کرد. امروزه اصل مو ضوع انتخاب را به عنوان یک اصل جدید اکثراً پذیرفته اند، و در آنالیز حقیقی جدید، نظریه‌ی اعداد اصلی و ترتیبی نامتناهی، جبر جدید و عرصه‌ی وسیعی از توپولوژی از این اصل بیشتر استفاده می‌شود (٤).

اصل انتخاب

در این قسمت، ابتدا حاصل ضرب خانواده‌ی دل‌خواه از ست‌ها را تعریف کرده، سپس رابطه‌ی آن‌را با اصل انتخاب بیان می‌کنیم.

تعریف: اگر I یک ست و $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ی اندکس گزاری شده توسط عناصر I باشد، آن‌گاه حاصل ضرب دکارتی این خانواده‌ی اندکس دار به‌صورت $\prod_{i\in I} A_i$ نشان داده، و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\prod_{i\in I} A_i = \{f \in (\cup_{i\in I} A_i)^I: \quad \forall i \in I \quad , f(i) \in A_i\}$$

اگر $I = \emptyset$ یا یکی از A_i ها خالی باشد، آن‌گاه این حاصل ضرب خالی می‌باشد.

به‌طور نمونه فرض کنیم $I = \{1 , 2 , 3\}$، و ست‌های A_1 , A_2 , A_3 داده شده است. می‌خواهیم $\prod_{i\in I} A_i$ را به دست آوریم. طبق تعریف بالا این حاصل ضرب برابر ست همه‌ی توابع تعریف شده روی ست سه عنصری $\{1,2,3\}$ است که $f(1) \in A_1$، $f(2) \in A_2$ و $f(3) \in A_3$.

$$\prod_{i=1}^{3} A_i = \{f \in (A_1 \cup A_2 \cup A_3)^{\{1,2,3\}}: f(1) \in A_1 \quad , f(2) \in A_2 \, , f(3) \in A_3\}$$

پس هر عنصر این ست، تابع است که باید سه قیمت آن در اعداد ۱ , ۲ و ۳ معین شود.

برای آسانی $f(1)$ را به f_1، $f(2)$ را به f_2 و $f(3)$ را به f_3 نشان می‌دهیم. در اصل خود تابع را به صورت $f = (f_1 , f_2 , f_3)$، نمایش می‌دهیم. از این جا تساوی زیر حاصل می‌شود.

$$\prod_{i=1}^{3} A_i = \{(f_1 , f_2 , f_3): f_1 \in A_1 \, , f_2 \in A_2 \, , f_3 \in A_3\} = A_1 \times A_2 \times A_3$$

از این جا می‌توان نتیجه گرفت که حاصل ضرب خانواده‌یی از ست‌ها تعمیم حاصل ضرب دکارتی تعداد متناهی ست است. به‌همین خاطر هر عنصر دل‌خواه حاصل ضرب $\prod_{i\in I} A_i$ به‌صورت $(f_i)_{i\in I}$ هم نشان داده می‌شود.

حال تعریف دقیق از اصل انتخاب ارائه می‌دهیم.

تعریف (اصل انتخاب): اگر $I \neq \emptyset$ و برای هر $i \in I$، $A_i \neq \emptyset$، آن‌گاه $\prod_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. می‌توان آن را به این صورت بیان کرد که حاصل ضرب خانواده‌ی غیرخالی از ست‌های غیرخالی، غیرخالی است.

در حالت خاص اگر $I \neq \emptyset$، $i \in I$، $A_i = A \neq \emptyset$ باشد، آن‌گاه $A^I \neq \emptyset$ (۳).

به عبارت دیگر اگر A یک ست غیرخالی متشکل از ست‌های غیرخالی باشد، آن‌گاه یک ست C وجود دارد طوری که از هر عنصر A حداقل یک عنصر را شامل می‌شود.

تعریف: تابع انتخاب برای یک ست غیرخالی A تابعی $f: P(A) \setminus \{\ \} \to A$ است طوری که برای هر $B \in P(A) \setminus \{\ \}$، $f(B) \in B$ (۲).

بنأءً، اصل انتخاب بیان می‌کند که اگر A یک ست غیرخالی متشکل از ست‌های غیرخالی باشد، آن‌گاه یک تابع $f: A \to \bigcup_{A_i \in A} A_i$، وجود دارد طوری‌که برای هر $X \in A$، $f(X) \in X$ (۱).

در این قسمت برای درک بهتر، تعاریف زیر را یادآوری می‌کنیم:

تعریف: اگر $(P, \leq)$ یک ست مرتب قسمی‌و $A \subseteq P$ باشد، آن‌گاه $u \in P$ یک سرحد بالایی A نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $x \in A$، داشته باشیم: $x \leq u$، عنصر m از A (P) یک عنصر ماکزیمال $A(P)$ نامیده می‌شود، هرگاه از دو شرط $x \in A$ $(x \in p)$ و $m \leq x$، تساوی $x = m$ نتیجه شود. به صورت مشابه، سرحد پایین و مینیمال یک ست تعریف می‌شود. در این مقاله تنها ترتیب روی خانواده‌ی ست‌ها همان ترتیب $\subseteq$ است (۷).

حال به تعریف خانواده‌ی فامیل متناهی می‌پردازیم.

تعریف: خانوانده‌ی $\mathfrak{I}$ از ست‌ها را خانواده‌ی مشخصه متناهی می‌نامیم، هرگاه $A \in \mathfrak{I}$ باشد: اگر و تنها اگر همه‌ی ست‌های فرعی متناهی A در $\mathfrak{I}$ باشد.

فرض کنیم $(P, \leq)$ یک ست مرتب قسمی باشد. ست فرعی C از P زنجیر نامیده می‌شود، هرگاه هر دو عنصر C قابل مقایسه باشند. به این معنا که برای هر دو عنصر C مانند c_1 و c_2، باید $c_1 \leq c_2$ یا $c_2 \leq c_1$. اگر $\mathfrak{R}$ فامیل از ست‌ها باشد، آن‌گاه با ترتیب $\subseteq$ مرتب می‌شود. فامیل فرعی C از $\mathfrak{R}$ را زنجیری در $\mathfrak{R}$ نامیم، هرگاه برای هر دو عنصر C_1 و C_2 از C، $C_1 \subseteq C_2$ یا $C_2 \subseteq C_1$.

به عنوان مثال، فرض کنیم $\mathfrak{R}$، گردایه‌ی همه‌ی ست‌های فرعی متناهی $\mathbb{N}$ باشد. این فامیل مشخصه متناهی نیست، زیرا همه‌ی ست‌های فرعی متناهی $\mathbb{N}$ در $\mathfrak{R}$ بوده اما $\mathbb{N}$ در $\mathfrak{R}$ نیست (ست اعداد طبیعی نامتناهی است).

لیما: فرض کنیم $\mathfrak{I}$ فامیل مشخصه متناهی از ست‌ها و C یک زنجیر در آن باشد، آن‌گاه $\bigcup C \in \mathfrak{I}$

اثبات: کافی است نشان دهیم هر ست فرعی متناهی $\bigcup C$ در $\mathfrak{I}$ است. فرض کنیم $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ ست فرعی متناهی دل‌خواه $\bigcup C$ باشد. بنابراین، ست‌های c_1، c_2، ... و c_n در C چنان موجود است که $c_1 \subseteq C_1$، $c_2 \subseteq C_2$، ... و $c_n \subseteq C_n$. اما C_1، C_2، ... و C_n باهم قابل مقایسه اند. پس یکی از آن‌ها مانند C_{i_0} شامل بقیه است. از این‌جا می‌توان نتیجه گرفت که $\{c_1, c_2, \dots, c_n\} \subseteq C_{i_0}$.

از آن‌جا که، C_{i_0} عنصر ـ فامیل مشخصه متناهی $\mathfrak{I}$ است، پس هر ست فرعی متناهی آن از جمله، $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ در $\mathfrak{I}$ است و قضیه ثابت می‌شود (۳).

اصل انتخاب و اصول معادل آن

شاید بیشتر از خود اصل ظاهراً آشکارای انتخاب، معادل‌های غیر آشکارای آن کاربرد داشته باشند. در این بخش هر یک از این اصول را بیان و معادل بودن شان را نیز ثابت می‌نماییم.

لیمای توکی: هر فامیل مشخصه متناهی دارای عنصر ماکزیمال است (٦).

چون اعضای فامیل مشخصه متناهی ست‌ها هستند، ترتیب روی آن $\subseteq$ است. عنصر ـ ماکزیمال در این گفامیل؛ یعنی ست مانند M از آن فامیل طوری که اگر ست دیگری از آن فامیل مانند A در شرط $M \subseteq A$ صادق بود، آن‌گاه $A = M$.

مثال، فرض کنیم $\mathfrak{R}$، فامیل همه‌ی ست‌های فرعی متناهی $\mathbb{N}$ باشد. قبلاً دیدیم که این فامیل مشخصه متناهی نیست. این فامیل عنصر ماکزیمال هم ندارد، زیرا اگر ست متناهی عنصر ماکزیمال آن باشد، با اضافه‌کردن عنصر دیگری از اعداد طبیعی به آن، به ست بزرگ‌تر خواهیم رسید که یک تناقض است.

فرض کنیم $(P, \leq)$ یک ست مرتب قسمی باشد، گوییم C یک زنجیر ماکزیمال در آن است. هر گاه C زنجیر بوده، مجموعه‌ی حاصل از آن با ا ضافه کردن عضو دیگری از P به آن زنجیر نباشد. این بدان معناست که عنصر جدید با حداقل یکی از عناصر C قابل مقایسه نیست.

اصل ماکزیمالیتی هاسدورف: هر ست مرتب قسمی، دارایی یک زنجیر ماکزیمال است.

لیمای زرن: هر ست مرتب قسمی که در آن هر زنجیر یک سرحد بالا داشته باشد، دارای عنصر ماکزیمال است.

قضیه‌ی خوش‌ترتیبی: هر ست را می‌توان خوش‌ترتیب کرد (۹).

به این معنا که برای هر ست دل‌خواه ترتیبی وجود دارد که آن ست با آن ترتیب، خوش‌ترتیب است.

در بخش‌های قبلی، پنج اصل را بیان کردیم اگر چی که ممکن است روی آن‌ها نام اصل را نگذاشته باشیم. مثلا نام یکی از آن‌ها لیمای توکی گفتیم، در حالی که باید می‌گفتیم اصل توکی. ثابت شده است که اصل انتخاب مستقل از اصول دیگری ریاضی است و قبول و رد آن تأثیری بر علم ریاضی نمی‌گذارد. البته قبول یکی از این اصول و در نتیجه قبول بقیه‌ی اصول (طبق قضیه‌ی بعد) معادل، باعث راحت‌تر شدن اثبات‌های ریاضی می‌گردد. در سطح ریاضی مقدماتی، این اصول را دانسته در نظر می‌گیریم (۵).

قضیه: اصول زیر معادل اند:

الف. اصل انتخاب، ب. لیمای توکی، ج. اصل ماکزیمالیتی‌هاسدورف، د. لیمای زرن، هـ. قضیه‌ی خوش‌ترتیبی

اثبات: کافی است نشان دهیم که:

الف: ⇐ ب: ⇐ ج: ⇐ د: ⇐ ه: ⇐ الف:

طولانی‌ترین قسمت اثبات، مرحله‌ی اول اثبات است، اثبات قسمت‌های بعدی ساده‌تر است.

در این بخش ابتدا فامیل فرعی $f-$ القایی را برای تابع f از یک فامیل ست‌ها به یک فامیل فرعی آن را تعریف کرده، سپس قسمت اول (لیمای توکی نتیجه‌ی اصل انتخاب است) را اثبات می‌کنیم (۸).

تعریف: فرض کنیم A فامیل از ست‌ها و B، یک فامیل فرعی آن و f تابع از A به B باشد. یک فامیل فرعی $\oint$ از A را $f-$ القایی نامیم، هرگاه در سه شرط زیر صدق کند:

الف. $\emptyset \in \oint$ ب. $f(\oint) \subseteq \oint$ ج. اگر β یک زنجیر در $\oint$ باشد آن‌گاه $\cup\,\beta \in \oint$

قسمت «ب» مبین این حقیقت است که اگر $A \in \oint$ باشد، آن‌گاه $f(A) \in \oint$.

به‌طور نمونه، فرض کنیم A، فامیل همه‌ی ست‌های فرعی متناهی اعداد طبیعی باشد، $f: A \to A$ با ضابطه‌ی $f(A) = A$ مفروض است. فامیل A، $f-$ القایی نیست. زیرا با زنجیر $\beta = \{\emptyset، \{1\}، \{1,2\}، \dots، \{1,2,\dots،n\}، \dots\}$ در A است، اما $\cup\,\beta = \mathbb{N}$ در A نیست.

تذکر: $B = \{\emptyset, \{1\}\}$، $f-$ القایی است.

اینک به اثبات قسمت اول قضیه (لیمای توکی از اصل انتخاب نتیجه می‌شود)، می‌پردازیم.

فرض کنیم لم توکی درست نباشد، پس یک فامیل غیرخالی و مشخصه متناهی به نام F موجود است که دارای عنصر ماکزیمال نیست. بنابراین، برای هر $F \in \mathrm{F}$، فامیل A_F با تعریف زیر غیرخالی است:

$$A_F = \{E \in \mathrm{F}: F \subsetneq E\}$$

چون $\emptyset \in \mathrm{F}$، آن‌گاه روشن است که $\{A_F\}_{F\in\mathrm{F}}$ فامیل غیرخالی از ست‌های غیرخالی است. بنابر اصل انتخاب تابع غیرخالی زیر موجود است:

$$f: \mathrm{F} \to \cup_{F\in\mathrm{F}} A_F : f(F) \in A_F$$

نظر به تعریف f، برای هر $F \in \mathrm{F}$، داریم: $F \subsetneq f(F)$. از طرفی با توجه به مشخصه متناهی بودن F و تعریف f، F فامیل f –القایی است. فرض کنیم u کلاس همه‌ی فامیل‌های f – القایی باشد، روشن است که $\mathrm{F} \in u$ و در نتیجه $\oint_0$، اشتراک همه‌ی فامیل‌های در u، غیرخالی است.

$$\oint_0 = \cap\, u = \{\acute{A}:\ \forall A \in u : \acute{A} \in A\}$$

$\oint_0$، کوچک‌ترین فامیل f –القایی است، بنابراین، برای هر f –القایی A، داریم: $\oint_0 \subseteq A$، حال گردایه‌ی $\mathcal{H}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{H} = \{A \in \oint_0 :\ B \in \oint_0, B \subsetneq A \Longrightarrow \quad f(B) \subseteq A\}$$

ثابت می‌کنیم اگر $A \in \mathcal{H}$ و $C \in \oint_0$، آن‌گاه $C \subseteq A$ یا $f(A) \subseteq C$. برای اثبات، برای هر A عضو $\mathcal{H}$، فامیل y_A را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$y_A = \{C \in \ \oint_0 : C \subseteq A \ or\ f(A) \subseteq C\}$$

y_A فامیلی f – القایی ست فرعی $\oint_0$ است، بنابراین، $y_A = \oint_0$. حال نشان می‌دهیم $\mathscr{H} \subseteq \oint_0$، f–القایی بوده و در نتیجه $\mathscr{H} = \oint_0$.

الف. $\emptyset$ هیچ ست فرعی خاص ندارد و بنابر تعریف $\mathcal{H}$ و قانون انتفای مقدم، $\emptyset \in \mathcal{H}$.

ب. فرض کنیم $A \in \mathcal{H}$، نشـــان می‌دهیم که $f(A) \in \mathscr{H}$. برای این کار باید نشـــان دهیم اگر $B \in \oint_0$ و $B \subsetneq f(A)$ باشد، آن‌گاه $f(B) \subseteq f(A)$، فرض کنیم $B \in \oint_0$ و $B \subsetneq f(A)$. چون $B \in \oint_0 = y_A$، آن‌گاه $B \subseteq A$ یا $f(A) \subseteq B$.

اما با توجه به $B \subsetneq f(A)$ حالت $f(A) \subseteq B$ غیر ممکن اســت و در نتیجه $B \subseteq A$. از این‌جا دو حالت داریم $B \subsetneq A$ یا $B = A$. اگر $B \subsetneq A$ آن‌گاه با توجه به تعریف $\mathscr{H}$، $f(B) \subseteq A \subseteq f(A)$ و در نتیجه $f(B) \subseteq f(A)$ و بنابراین، $f(A) \in \mathscr{H}$، اگر $B = A$، روشـن اسـت که $f(B) \subseteq f(A)$ و بنابراین، $f(A) \in \mathscr{H}$. پس اگر $A \in \mathscr{H}$، آن‌گاه $f(A) \in \mathscr{H}$.

ج. باید نشـــان داد اگر β زنجیری در $\mathscr{H}$ باشـــد، آن‌گاه $\cup\, \beta \in \mathcal{H}$ فرض کنیم که $B \in \oint_0$ و $B \subsetneq \cup\, \beta$. چون $B \in \oint = y_A$ برای هر $A \in \beta$، آن‌گاه دو حالت اتفاق می‌افتد:

۱) $B \subseteq A$ ؛ $\exists A \in \beta$ یا ۲) $f(A) \subseteq B$ ، $\forall A \in \beta$

اگر حالت دوم اتفاق بیفتد، آن‌گاه به تناقض زیر می‌رسیم:

$$\mathrm{B} \subsetneq \cup\, \beta \subseteq \cup_{\mathrm{A} \in \beta} \mathrm{f(A)} \subseteq \mathrm{B}$$

بنابراین، حالت اول اتفاق می‌افتد. پس برای یک $A \in \beta$، داریم: $B \subseteq A$. اگر $B \subsetneq A$ باشد، چون $A \in \mathscr{H}$، پس $f(B) \subseteq A \subseteq \cup\, \beta$ و بنابراین $f(B) \subseteq \cup\, \beta$، از این‌جا رابطه $\cup\, \beta \in \mathscr{H}$ نتیجه می‌شود. اگر $B = A$، آن‌گاه $B \in \mathscr{H}$ و $\cup\, \beta \in \oint_0 = y_B$. این غیرممکن است، چون $f(B) \subseteq \cup\, \beta$.
از این‌جا نتیجه گرفته می‌شود که $\cup\, \beta \in \mathscr{H}$ و $\mathscr{H}$ یک f–القایی است. بنابراین، $\mathscr{H} = \oint$.

حال اثبات را کامل می‌کنیم. اگر $A \in \oint_0 = \mathcal{H}$ و $B \in \oint_0 = y_A$، آن‌گاه $B \subseteq A$ یا $\mathrm{f(A)} \subseteq \mathrm{B}$. اما به کمک رابطه‌ی دوم و $A \subseteq f(A)$، رابطه‌ی $A \subseteq B$ به دست می‌آید. بنابراین، $\oint_0$ یک زنجیر اســـت. اگر $M = \cup\, \oint_0$، چون $\oint_0$ فامیل f–القایی اســـت، پس $M \in \oint_0$. اما $M \subsetneq f(M) \in \oint_0$. چون M اتحاد همه‌ی عناصر $\oint_0$ بوده و چون $f(M) \in \oint_0$ بنابراین، $f(M) \subseteq M$ و این یک تناقض است (۱).

در این قسمت سه استنتاج زیر را ثابت می‌کنیم:

لیمای توکی $\Rightarrow$ اصل ماکزیمالیتی‌هاسدورف $\Rightarrow$ لیمای زرن.

قضیه‌ی خوش‌ترتیبی $\Rightarrow$ اصل انتخاب.

اثبات (لیمای توکی، اصل ماکزیمالیتی را نتیجه می‌دهد):

فرض کنیم $(P, \leq)$ یک ست مرتب قسمی‌غیرخالی باشد. اگر y را فامیل همه‌ی زنجیرهای درون P درنظر گیریم، آن‌گاه روشـــن اســـت که y یک فامیل مشـــخصـــه متناهی اســـت. از این‌جا نتیجه گرفته می‌شود که y دارای عنصر ماکزیمال (زنجیر ماکزیمال) است.

اثبات (اصل ماکزیمالیتی، لیمای زرن را نتیجه می‌دهد):

فرض کنیم $(P, \leq)$ یک ست مرتب قسمی غیرخالی باشد که هر زنجیر آن دارای سرحد بالاست. با توجه به اصـل ماکزیمالیتی‌هاسـدورف، زنجیر ماکزیمال C در P موجود اسـت. فرض کنیم m یک سرحد بالای C باشد، نشان می‌دهیم که m عنصر ماکزیمال P است. فرض کنیم چنین نباشد، پس عضو x در P چنان موجود است که $x > m$. روشن است $\acute{C} = C \cup \{x\} \neq C$ یک زنجیر در P است که با ماکزیمالیتی C متناقض است.

اثبات (اصل خوشترتیبی، اصل انتخاب را نتیجه می‌دهد):

فرض کنیم $\{A_i\}_{i\in I}$ فامیل غیرخالی از ست‌های غیرخالی باشد. ست $D = \cup_{i\in I} A_i$ را خوش‌ترتیب می‌کنیم. حال تابع $f: I \rightarrow D = \cup_{i\in I} A_i$ با ضابطه‌ی $f(i) = minA_i$ موجود در $\prod_{i\in I} A_i$ است.

برای اثبات (اصل خوش‌ترتیبی نتیجه‌ی لیمای زرن است):
یک ترتیب روی فامیل ست‌های مرتب قسمی غیرخالی قرار داده، نشان می‌دهیم که لیمای زرن، قضیه‌ی خوش‌ترتیبی را نتیجه می‌دهد. دراین جا ست‌های مرتب به‌صورت زوج متشکل از ست و ترتیب روی آن نشان داده می‌شود. برای مثال، خوش‌ترتیبی روی ست یک عنصری $P = \{x\}$، باید شامل $x \leq x$ باشد و در نتیجه ترتیب ما به‌صورت $\leq = \{(x\,, x)\}$ خواهد بود. پس می‌توان ست مرتب فوق را به‌صورت $(\{x\}\,, \{(x\ \,, x)\})$، نشان داد.

فرض کنیم S یک ست باشد. Z را فامیل همه‌ی ست‌های فرعی خوش‌ترتیب S مانند W با ترتیب $\leq W$ می‌گیریم. با توجه تو ضیح قبل $(\{x\}\,, \{(x\ \,, x)\}) \in Z$ برای هر $x \in S$ حال ترتیب $\preccurlyeq$ را بروی Z قرار می‌دهیم. فرض کنیم که $(W_1\,, \leq_1)$ و $(W_2\,, \leq_2)$ در Z باشند، تعریف می‌کنیم $(W_1, \leq_1) \preccurlyeq (W_2, \leq_2)$ به این معناست که $W_1 = W_2$ و $\leq_2 = \leq_1$ یا این‌که عنصر a در S موجود است که:

$$W_1 = \{\mathrm{x} \in W_2\colon\ x \leq a\ \ ,\ x \neq a\}$$

و $W_1 \subseteq W_2$، دراین صورت گوییم $(W_2\,, \leq_2)$ یک ادامه‌ی $(W_1\,, \leq_1)$ است.

اثبات (قضیه‌ی خوش‌ترتیبی نتیجه‌ی لیمای زرن است):

فرض کنیم S یک ست دل‌خواه غیرخالی است، فرض کنیم $C = \{(W_i, \leq_i)\}_{i\in I}$ یک زنجیر در Z مطابق ترتیب $\preccurlyeq$باشد. قرار می‌دهیم $W = \cup_{i\in I}\, w_i$ و $\leq = \cup_{i\in I} \leq_i$، مجموعه‌ی $(W, \leq)$ خوش‌ترتیب است. بنابراین، طبق لم زرن Z یک عنصر ماکزیمال به نام $(w_\circ, \leq_\circ)$ دارد. $W_\circ = S$ زیرا در غیر این صورت برای $x \in S - W_\circ$, خوش‌ترتیبی $\leq_\circ$ به صورت زیر روی $W_\circ \cup \{x\}$ موجو است.

$$\leq_x = \leq_\circ \cup \{(w\,, x)\colon w \in W_\circ\}$$

این مطلب با ماکزیمال بودن $(W_\circ, \leq_\circ)$ متناقض است.

و این اثبات قضیه را تمام می‌کند.

کابردها

در این بخش به کمک اصل انتخاب و معادل‌های آن بعضی قضایای مهم شاخه‌های دیگر ریاضی را ثابت می‌نماییم.

قضیه: اگر $f: A \to B$ پوشا باشد، دارای معکوس راست است.

اثبات: چون f پوشـاسـت، گردایه‌ی غیرخالی از ست‌های غیرخالی $\{f^{-1}(\{b\})\}_{b\in B}$ را در نظر می‌گیریم. بنابراصـل انتخاب تابع انتخاب $g: B \to \cup_{b\in B} f^{-1}(\{b\})$ را با شرط $g(b) \in f^{-1}(\{b\})$ در نظر می‌گیریم. اما نظر به تعریف هر $a \in f^{-1}(\{b\})$ در شرط $f(a) = b$ صـادق اسـت. از جمله برای $a = g(b)$ رابطه‌ی $f(g(b)) = b$ به دسـت می‌آید. از این‌جا وا ضح اسـت که $g: B \to A$ معکوس راست f است.

قضیه: اگر A یک ست غیرخالی باشدآن‌گاه تابع $f: A \to B$ پوشا است اگرو تنها اگر $Imf = B$ (۲).

اثبات: اگر f پوشـا باشـد پس تابع $g: B \to A$ وجود دارد طوری‌که $fog = id_B$ پس، برای هر $y \in B$، $f\big(g(y)\big) = y$ قرار می‌دهیم، $x = g(y)$ بنـابراین، $f(x) = y$ و $B \subseteq Imf$ رابطه $Imf \subseteq B$ نیز واضح است، پس $B = Imf$

برعکس فرض کنیم $B = Imf$. برای هر $y \in B$ سـت $T_y = \{x \in A: f(x) = y\}$ غیرخالی است. بنابر اصل انتخاب در مورد ست A، این ست تابع انتخاب $\varphi: P(A) \setminus \{\ \ \} \to A$ خواهد داشت. حال تابع را $g: B \to A$ چنین تعریف می‌کنیم:

$$\forall\, y \in B \ \ (g(y) = \varphi(T_y))$$

برای تکمیل اثبات کافی است رابطه که $fog = id_B$ را بررسی کنیم. برای هر $y \in B$ داریم:

$$(fog)(y) = f\big(g(y)\big) = f(\varphi\big(T_y\big))$$

از طرف دیگر نظر به تعریف تابع انتخاب اگر $\varphi\big(T_y\big) = x$ آن‌گاه $x \in T_y$ پس

$$(fog)(y) = f(x) = y$$

به عنوان کاربرد دیگر نشان می‌دهیم که هر فضای وکتوری V روی ساحه اسکالر $\mathbb{F}$ دارای پایه است.

می‌دانیم که برای فضای وکتوری V روی ساحه $\mathbb{F}$، $B \subsetneqq V$ را یک پایه برای V نامیم، هر گاه عناصر B مسـتقل خطی بوده، برای هر $\vec{v} \in V$، یک سـت فرعی متناهی $m-$ عنصـری (m به وکتور v بسـتگی دارد) از B مانند $B_v = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$ و m اسـکالر f_1 , f_2، ... و f_m از $\mathbb{F}$ چنان موجود باشد که:

$$\vec{v} = f_1\vec{v}_1 + f_2\vec{v}_2 + \cdots + f_m\vec{v}_m$$

قضیه: هر فضای وکتوری V روی ساحه اسکالر $\mathbb{F}$ دارای پایه است.

اثبات: گردایه‌ی A متشکل از همه‌ی ست‌های فرعی مستقل V را در نظر می‌گیریم، فامیل A مشخصه متناهی است، زیرا اگر عناصر ستی مستقل خطی باشند، عناصر هر ست فرعی آن و از جمله ست‌های فرعی متناهی آن مستقل خطی بوده و بر عکس، طبق تعریف، اگر هر ست فرعی متناهی یک ست، مستقل خطی باشد، عناصر خود ست هم مستقل خطی اند. طبق لیمای توکی، A دارای عنصر ماکزیمال B است. طبق تعریف A عناصر B مستقل اند. حال باید نشان دهیم هر عنصر V مانند $\vec{v}$ ترکیب خطی تعداد متناهی عناصر B است. اگر $\vec{v} \in B$ باشد، آن‌گاه حکم واضح است، زیرا $\vec{v} = 1\,\vec{v}$. فرض کنیم $\vec{v} \notin B$. با توجه به این‌که B یک ست مستقل خطی ماکزیمال است، عناصر ست $\mathcal{H} = B \cup \{\vec{v}\}$ وابسته اند. بنابراین، تعداد متناهی از عناصر $\mathcal{H}$ موجود است که وابسته اند، حتماً یکی از این عناصر $\vec{v}$ است. پس این ست وابسته به‌صورت $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_m\}$ بوده که $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$ یک ست فرعی B است. از این‌جا اسکالرهای $f_\circ \neq 0$، f_1، f_2، ... و f_m طوری موجود اند که:

$$f_\circ\vec{v} + f_1\vec{v}_1 + f_2\vec{v}_2 + \cdots + f_m\vec{v}_m = \circ$$

با توجه به این‌که $f_\circ \neq 0$، واضح است که $\vec{v}$ ترکیب خطی عناصر B است و در نتیجه B یک پایه برای V است.

قضیه: فرض کنیم V یک فضای وکتوری روی ساحه $\mathbb{F}$ و S یک ست فرعی مستقل خطی V است. دراین صورت پایه‌ی برای V شامل ست S موجود است.

اثبات: گردایه‌ی A را متشکل از همه‌ی ست‌های مستقل خطی در V می‌گیریم که شامل S باشند روشن است که $S \in A \neq \emptyset$. نشان می‌دهیم هر زنجیر در A دارای یک سرحد بالاست. فرض کنیم $\{H_i\}_{i\in I}$ یک زنجیر در A باشد، نشان می‌دهیم که $H = \cup_{i\in I} H_i$ یک ست مستقل خطی است. فرض کنیم $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subseteq H$، از اینجا n اندکس i_1, i_2، .... و i_n از I چنان موجود است که $\vec{v}_t \in H_{i_t}$، چون H_{i_1}، H_{i_2}، ... و H_{i_n} عناصر زنجیر $(H_i)_{i\in I}$ هستند. پس باهم مقایسه شده، یکی از آن‌ها مانند H_{i_k} از بقیه بزرگ‌تر است. از این‌جا رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subseteq H_{i_k}$$

و چون عناصر H_{i_k} مستقلند، پس عناصر $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ مستقل بوده، در نتیجه H یک ست مستقل خطی است. با توجه به لیمای زرن A دارای عنصر ماکزیمال است. این عنصر ماکزیمال یک پایه برای V است (۳).

نتیجه‌گیری

از مو ضوعات برسی شده در این‌جا بر می‌آید که اصل انتخاب یکی از اصول اساسی و مهم در ریاضی است که تعداد زیاد از نتایج دیگر ریاضی بر اساس آن بیان و اثبات می‌گردد.

ثابت شده است که اصل انتخاب مستقل از اصول دیگر ریاضی بوده و قبول و رد آن تأثیری بر علم ریاضی نمی‌گذارد. این اصل با چند اصل معروف دیگر، معادل بوده و قبول یکی از این اصول و در نتیجه قبول بقیه‌ی اصول معادل آن، باعث راحت‌تر شدن اثبات‌های ریاضی می‌گردد.

منابع

(۱) جهان‌شـاهلو، غلام رضـا، حسـین‌زاده لطفی، فرهاد و الهویرنلو، توفیق. مبانی ریاضـیات. تهران: گام نو، ۱۳۸٦، صص ۲۰۰-۲۰۷.

(۲) دوستی، حسین و جهان‌شـاهلو، غـلام رضا. مبانی ریاضیات. دانش‌گاه تربیت مـعلم. چاپ سوم، تهـران: ۱۳۸۰، صص ۸۴-۸۷.

(۳) شاطری نجف‌آبادی، حمید رضا. مبانی ریاضیات. دانشگاه اصفهان، اصفهان: ۱۳۸۵، صص ۱۸۷-۲۰۰.

(٤) لین، شووینگ‌تی و لین، یوفنگ. ترجمه عمید رسولیان. نظریه مجموعه‌ها و کاربردهای آن، چاپ سیزدهم، مرکز نشر دانشگاهی، تهران: ۱۳۸۸، صص ۱٦۵-۱٦۷.

(5) A.G.Hamilton, Numbers, Sets and Axioms, Cambridge University Press. 1982.

(6) Enderton, Herbert B, Elements of set theory, Academic Press. 1977.

(7) Jech, Thomas,An outline of Set Theory New York: Springer. 1997.

(8) Hrbacek, Karl;Jech,Thomas, Introduction To Set Theory. New York:Marcel Dekker, Inc. 1999.

(9) Moschovakis,Yiannis N, Notes on Set Theory. New York: Springer. 1994.