مجـلەی علمی-تحقیقی حـوزەی علوم
طـبیعی پـوهــنتون کـابـل، ۲ (٤) ۱٤۰۰

د فردهلم دوهم ډول متجانسې انتگرالي معادلې حل

پوهنیار ثمرالدین جبران[۷]
تقریظورکوونکی: پوهنوال محمدخان حیدری

لنډیز

د انتگرالي معادلو په تیوري کې زیات کار شـوی، او د څېړنې له مخې به دوه ډوله د یا وایو چې سـاده ډلبندي یې د ولتیرا په معادلو کې د اولیه شرایطو لرونکي مسـایل او د فردهلم په معادلو کې د سرحدي مسـایلو لرونکي مسـایل دي. که و غواړو دغه ډول معادلې سـاده کړو او بېلابېل حالات یې وارزوو نو لازمه ده تر څو یې کارنل وڅېړو او دلته مو ددوی پرتلـه هم ترسره کړې او دلته ځان د فردهلم په دوهم ډول متجانســـو معادلو پورې محدودوو. دغه مقاله د اختصــاصــی قیمتونو، اختصــاصي وکتورنو او د هغوی اړونده قضــیو باندې پیلوو او دهغوی له څېړنې وروسته دهغوی پرتله شوې او پایلې یې لاسته راوړل شوې.

کلیدی اصطلاحات: انتگرالي معادلې، ولتیرا، فردهلم، کارنل، اختصاصي قیمتونه، اختصاصي تابع‌گانې

Solution of Homogeneous Fredholm Integral Equations of the Second Kind

Jr. Teaching Asstt. Samaruddin Jebran

Abstract

There have been many development in the theory of integral equation. The basic division as initial value problem into Voltere Integral equations and boundary value problem into Fredholm Integral equations is a most to follow. If we want to simplify these equations it is convenient to focus the Kernel and also we consider the various cases of the kernel and we compare these situations we shall restrain ourselves only for the Homogeneous Fredholm integral equations of the second kind. This article begins with the discussion of an essential part called Eigen value, Eigen function and the related theorems are explained.

Keywords: Integral equation; Volterr; Fredholm; Kernel; Eigen value; Eigen function.

ارجاع

جـبران، ثمـرالدین. (۱٤۰۰). د فـردهلم متجانسې دوهم ډول انتگرالي معادلې حـل. مجـلەی علمی- تحـقیقی حـوزەی علـوم طبیعی پوهـنتون کـابل، شماره ۲ (٤)، صص ۸۷ – ۹٦.

---

[۷] استاد پوهنځی ریاضیات، پوهنتون کابل

سریزه

انتگرالي معادلې هغو معادلو ته ویل کیږي چې د انتگرال د علامې لاندې یې نامعلومه تابع شتون ولري او دغه نظریه دلومړي ځل لپاره (1910) Harry Bateman له لوري وړاندې شــوه، ډېرې فزیکي ورځني مســایل او یا په نورو تطبیقي څانګو کې د اولیه شرایطو یا سرحدی مســایلو لرونکي وي او دا مسایل زیاتره د معمولي یا قسمي دیفرانسیل معادلو په فورم بدلیږي (۲)، او وروسته یې حل په لاس راځي دا چې د دیفرانســیل معادلو حل ځینې وخت بیخي ســتونزمن وي، نو ددې کار د آســانتیا لپاره دیفرانسیل معادلې له اړونده شرایطو سره سم په انتگرالي معادلو بدلوي. سربېره پدې انتگرالي معادلې دا وړتیا رابښي چې دیفرانسیل معادلو حل ته مناسبې لارې ولټوو او دیفرانسیل معادلې داولیه شرایطو او سرحدی شرایطو په پام کې نیولو سره په اسانۍ سره په انتگرالي معادلو دبدلون وړتیا لري. مخکې له دې چې مو ضوع پیل کړو لازمه ده چې لومړی دانتگرالي معادلو په اړه لنډ مالومات او ددې معادلو دجزیاتو به اړه مالومات وړاندې کړو.

انتگرالي معادلې

له هغو معادلو څخه عبارت دي چې په هغه کې یوه نامالومه تابع د انتگرال د یوې یا څو علامو لاندې وي او په دې معادله کې دهمدې نامالومې تابع مشـــتقات هم راڅرګند شي د انتگرالي معادلې په نوم یادیږي دبېلګې په توګه:

د $a \le x \le b$ او $a \le \xi \le b$ لپاره

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,\xi).u(\xi)d\xi$$

$$u(x) = \int_a^b K(x,\xi).u(\xi)d\xi$$

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x,\xi)[u(x)]^3 d\xi$$

انتگرالي معادلې چې $u(x)$ یې نامالومه تابع $f(x)$ ، $K(x,\xi)$ مالومې تابع‌ګانې او a,b,λ ثابت عددونه دي. کېدای شي تابع‌ګانې د x او ξ حقیقي متحولینو له جنســـه مختلطې تابع‌ګانې وي. د $K(x,\xi)$ دوه متحوله تابع چې د $a \le x \le b$ او $a \le \xi \le b$ لپاره انتگرال مننونکې تابع ده د کارنل په نوم سره یادیږي او بېلابېل ډولونه لري، چې له متناظر، یو له بله بېلېدونکي، او تفا ضل کارنل څخه عبارت دي.

مشخصه قیمت او مشخصه تابع

دفردهلم متجانسه دوهم ډول انتگرالي معادله په پام کې نیسو چې په لاندې ډول سره ده.

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x,t).u(t)dt \qquad 1$$

دا څرګنده ده چې $u(x) = \circ$ د ټل لپاره په (1) معادله کې ریښــتوني ده او د څرګند حل په نوم سره یادیږي او پورتنۍ معادله یو غیرې صــفري حل $u(x) \neq 0$ هم لري چې د (1) معادلې د کارنل د مشـــخصـــه قیمت په نوم سره یادیږي. که چېرته $u(x) \neq 0$ وي نو دلته د $[a,b]$ په انتروال کې د $\phi(x)$ متمادي تابع شتون لري داسې چې:

$$\phi(x) = \lambda_\circ \int_a^b K(x,t).\phi(t)dt \qquad 2$$

نو $\phi(x)$ نظر د λ_0 مشـخصـه قیمت ته د (1) معادلې د مشـخصـه قیمت په نوم سره یادیږي. په هغه صــورت کې چې کارنل متناظر نه وي نو دفردهلم متجانســه انتگرالي معادله کېدای شي، مشــخصــه قیمت، مشخصه تابع ونلري (۱).

له بېلېدونکي کارنل سره د فردهلم متجانسې دوهم ډول انتګرالي معادلې حل

دفردهلم متجانسې دوهم ډول انتگرالي معادله په لاندې ډول ده:

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x,t).u(t)dt \qquad 3$$

په داســې حال کې چې $K(x,t)$ یو بېلېدونکی کارنل ده. او مانا یې داده چې کېدای شي دغه کارنل د حدونو د حاصــل ضرب د مجموعې په بڼه سره ولیکل شي او هر یو یې بېل بېل د x او t له جنســه تابع‌ګانې وي، که چېرې

$$K(x,t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x).g_j(x)dx \qquad 4$$

نو ۴ معادله به لاندې بڼه غوره کړي.

$$u(x) = \lambda \int_a^b [\sum_{i=1}^{n} f_i(x) g_i(x)].u(t)dt \qquad 5$$

$$\Rightarrow \qquad u(x) = \lambda \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \int_a^b g_i(t).u(t)dt \qquad 6$$

په پاس اړیکه کې مو یوازې د انتگرال او مجموعې ترتیب ته بدلون ورکړی.

اوس که چېرې:

$$K(x,t)=K(t,x)$$

فرض کړو نو د

$$u(x)=\lambda\sum_{i=1}^{n}C_i\,f_i(x) \qquad 7$$

مونږ لومړی C_i په وروسته ډول سره مومو. او همدارنگه معادله په پرلپسې ډول سره په $g_i(x),\ i=1,2.....n$ کې ضربوو او په $[a,b]$ انتروال کې په انتگرال نیسو او په لاس راځي

$$\int_a^b g_i(x)u(x)dx=\lambda\sum_{i=1}^{n}C_i\int_a^b g_1(x)\,f_i(x)dx \qquad 8$$

او مونږ تعریفوو چې

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda\alpha_{11} & -\lambda\alpha_{12} & -\lambda\alpha_{1n}\\ -\lambda\alpha_{21} & 1-\lambda\alpha_{22} & -\lambda\alpha_{2n}\\ -\lambda\alpha_{n1} & -\lambda\alpha_{2n} & 1-\lambda\alpha_{nn}\end{vmatrix} \qquad 10$$

$$\begin{cases}(1-\lambda\alpha_{11})C_1-\lambda\alpha_{12}C_2-........-\lambda\alpha_{1n}C_n=\circ\\ -\lambda\alpha_{21}C_1+(1-\lambda\alpha_{22})C_2-.....-\lambda\alpha_{2n}C_n=\circ\\ . \qquad\qquad\qquad\qquad .\\ . \qquad\qquad\qquad\qquad .\\ . \qquad\qquad\qquad\qquad .\\ -\lambda\alpha_{1n}C_1-\lambda\alpha_{2n}C_2-......(1-\lambda\alpha_{nn})C_n=\circ\end{cases} \qquad 11$$

اوس پورتنی معادلې په کار وړو او $\int_a^b f(x)g(x)=\circ$ معادله لاندې بڼه غوره کوي

$$C_1=\lambda\sum_{i=1}^{n}C_i\alpha_{1i}$$

$$C_1=\lambda[C_1\alpha_{11}+C_1\alpha_{12}+.....+C_1\alpha_{1n}]$$

$$=(1-\lambda\alpha_{11})C_1-\lambda\alpha_{12}C_2.......-\lambda\alpha_{1n}C_n=\circ$$

د معادلې مشخصه قیمتونه د $D(\lambda)$ څخه په لاس راځي او مونږ په اعظمي شمېر سره مشخصه قیمتونه تر لاسه کړل (۳).

د دوو تابع گانو عمودیت

که د $f(x)$ او $g(x)$ دوه تابعگانې په $a \le x \le b$ کې متمادي وي، هغه وخت اورتوگونال بلل کیږي چې لاندې اړیکه ریښتونې وي (۷).

$$\int_a^b f(x)g(x) = \circ \qquad 12$$

د مشخصه تابعگانو عمودیت

قضیه: د متناظر کارنل مشخصه تابع نظر د هغوی اړونده مشخصه قیمتونو ته اورتوگونال دي (۲).

ثبوت: دفردهلم دوهم ډول متجانسه انتگرالي معادله په پام کې نیسو چې په وروسته ډول سره ده.

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x,t).u(t)dt \qquad 13$$

دلته د $K(x,t)$ کارنل متناظر ده او فر ضوو چې $\phi_\circ(x)$ او $\phi_1(x)$ په $[a,b]$ انتروال کې اورتوگونال تابعگانې دي.

$$\int_a^b \phi_\circ(x)\phi_1(x)dx = \circ \qquad 14$$

څرنگه چې $\phi_\circ(x)$ او $\phi_1(x)$ مشخصه تابعگانې دي نو د تعریف په مرسته ویلی شو چې دغه به په 15 معادله کې هم ریښتونې وي، یعنې

$$\phi_0(x) = \lambda_0 \int_a^b K(x,t)\phi_0(t)dt \qquad 15$$

$$\phi_1(x) = \lambda_1 \int_a^b K(x,t)\phi_1(t)dt \qquad 16$$

څرنگه چې $K(x,t)$ تابع ده نو پدې اساس

$$K(x,t) = K(t,x) \qquad 17$$

اوس د 14 معادلې دواړه خواوې په $\phi_1(x)$ کې ضربوو او نظر x ته یې په $[a,b]$ انټروال کې انټگرال

نیسو او په لاس راځي چې

$$\int_a^b \phi_0(x)\phi_1(x)dx = \lambda_0\int_a^b \phi_1(x)\{\int_a^b K(x,t)\phi_0(t)dt\}dx$$
$$= \lambda_0\int_a^b \phi_0(x)\{\int_a^b K(x,t)\phi_1(t)dx\}dt$$

که چېرې د انټگرال ترتیب ته بدلوم ورکړو د ۱٦ له مخې لرو چې

$$= \lambda_0\int_a^b \phi_0(t)\{\int_a^b K(t,x)\phi_1(x)dx\}dt \qquad 18$$

اوس په ۱۷ کې دمتحولینو کې ځایونو بدلوو په لاس راځي چې

$$\int_a^b \phi_0(x)\phi_1(x)dx = 0 \qquad 19$$

او په ۱۹ کې د $\phi_1(t)$ قیمت وضع کولو څخه په لاس راځي چې

$$\int_a^b \phi_0(x)\phi_1(x)dx = \lambda_0\int_a^b \phi_0(t)\{\frac{\phi_1(t)}{\lambda}\}dt$$

یا

$$\lambda_1\int_a^b \phi_0(x)\phi_1(x)dx = \lambda_0\int_a^b \phi_0(x)\phi_1(x)dx$$

د معین انتکرال د تعریف په بنسټ لیکلی شو چې

$$(\lambda_1 - \lambda 0)\int_a^b \phi_0(x)\phi_1(x)dx = 0$$

څرنگه چې $\lambda_1 \neq \lambda 0$ ده نو $\lambda_1 - \lambda_0 \neq 0$ نو لیکلی شو چې زمونږ فرضیه سمه ده.

حقیقي مشخصه قیمتونه

قضیه: د متناظر کارنل مشخصه قیمت حقیقي ده (۸)ږ

ثبوت: دفریدولم متجانسې دوهم ډول انتګرالي معادله په پام کې نیسو

$$\left.\begin{aligned}\overline{\lambda_0} &= \alpha - i\beta \\ \overline{\phi_0}(x) &= u - iv\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned}\lambda_0 - \overline{\lambda_0} &= 2\beta i \\ \phi_0(x)\overline{\phi_0}(x) &= u^2 - v^2\end{aligned}\right. \qquad 20$$

فرضوو چې $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ یو مشخصه قیمت او $\phi_0(x) = u + iv$ یې اړونده مشخصه تابع وي، نو

$$\left.\begin{aligned}\overline{\lambda_0} &= \alpha - i\beta \\ \overline{\phi_0}(x) &= u - iv\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned}\lambda_0 - \overline{\lambda_0} &= 2\beta i \\ \phi_0(x)\overline{\phi_0}(x) &= u^2 - v^2\end{aligned}\right. \qquad 21$$

$$\phi_0(x) = \lambda_0 \int_a^b K(x,t)\phi_0(t)dt \qquad 22$$

$$\overline{\phi_0}(x) = \overline{\lambda_0} \int_a^b K(x,t)\overline{\phi_0}(t)dt \qquad 23$$

په داسې حال کې چې بار یو مختلط مزدوج را په ګوته کوي، $\overline{\phi_0}(x)$ او $\phi_0(x)$ مشخصه تابع‌ګانو د تعریف په مرسته سره ویلی شو چې په ۲۰ اړیکه کې ریښتونې ده او په لاس راځي چې

$$\phi_0(x) = \lambda_0 \int_a^b K(x,t)\phi_0(t)dt \qquad 24$$

$$\overline{\phi_0}(x) = \overline{\lambda_0} \int_a^b K(x,t)\overline{\phi_0}(t)dt \qquad 25$$

اوس که د ۲۲ معادلې دواړه خواوې په $\overline{\phi_0}(x)$ کې ضرب کړو او په $[a,b]$ انټروال کې یې نظر د x متحول ته انتګرال ونیسو په لاس راځي چې

$$\int_a^b \phi_0(x)\overline{\phi_0}(x)dx = \lambda_0 \int_a^b \overline{\phi_0}(x)\{K(x,t)\phi_0(t)dt\}dx$$

$$\int_a^b \phi_0(x)\overline{\phi_0}(x)dx = \lambda_0 \int_a^b \phi_0(t)\{K(x,t)\overline{\phi_0}(x)dx\}dt$$

د انتگرال د ترتیب په بدلون سره ثرنگه چې

$$K(x,t)=K(t,x)$$

ده نو لرو چې

$$\int_a^b \phi_0(x)\overline{\phi_0}(x)dx=\lambda_0\int_a^b \phi_0(t)\int_a^b K(t,x)\overline{\phi_0}(x)dx\}dt \qquad 26$$

اوس د متحولینو ځایونو ته بدلون ورکوو او ۲۲ معادله لاندې بڼه غوره کوي.

$$\overline{\phi_0}(t)=\overline{\lambda_0}\int_a^b K(t,x)\overline{\phi_0}(x)dx$$

په همدې ترتیب ۲۳ معادله به لاندې ډول سره بدلون مومي.

$$\int_a^b \phi_0(x)\overline{\phi_0}(x)dx=\lambda_0\int_a^b \phi_0(t)\{\frac{1}{\overline{\lambda_0}}\overline{\phi_0}(t)\}dt$$

یا:

$$\overline{\lambda_0}\int_a^b \phi_0(x)\overline{\phi_0}(x)dx=\lambda_0\int_a^b \phi_0(x)\overline{\phi_0}(x)dx$$

که د معین انتگرال له خاصیت څخه گټه واخلو نو په لاس راځي چې

$$2i\beta\int_a^b (u^2+v^2)dx=0$$

څرنگه چې $\phi_0(x)$ یوه مشخصه تابع ده او صفر نه ده نو دا دلیل ویلی شو چې $\int_a^b (u^2+v^2)dx\neq 0$ او دا پایله لاسته راځي چې

$\beta=0$. او دا دبیانیې ثبوت ده.

پایلې

د فریدولم دوهم ډول متجانسې انتګرالي معادلې له څېړلو څخه لاندې پایلې تر لاسه کولی شو.

۱. که چېرې د معادلاتو به ۱۳ سیستم کې ښی خوا کم له کمه یو عدد غیری صفري وي نو لاندې دوه حالته منځته راځي.

الف: که چېرې $D(\lambda)\neq 0$ وي نو د معادلاتو لومړی سیستم یوازینی غیرېصفري حل شتون لري (٦).

ب: که چېرې $D(\lambda)=0$ وي نو په لومړي سېستم کیدای شي هیڅ حل ونلري.

۲. که چېرې $f(x)=0$ وي نو په دې صـورت کې د لسـم سـیسـتم څخه په لاس راځي چې د هر $\alpha_{ij}=0$ ، $j=1,......,n$ سـیسـتم یو خطي متجانس سـیسـتم ته بدلون مومي او لاندې دوه حالته واقع کېدای شي:

الف: کـه چېرې $D(\lambda)\neq 0$ وي نو۱۱ سـیسـتم یوازینی صـفري حـل موجود ده چې لـه $c_1=c_2=.....=c_n=0$ څخه عبارت ده.

ب: که چېرې $D(\lambda)=0$ نو ۱۱ سیستم بې‌نهایت غیری صفري حلونه لري (۵).

۳. که چېرې $f(x)\neq 0$ وي او

$$\int_a^b g_1(x)f(x)dx=0,........,\int_a^b g_n(x)f(x)=0$$

نو د لومړی سیستم معادلې راښیي چې $\alpha_1,\alpha_2,........,\alpha_n=0$ او د ۱۱ سیستم د متجانسو معادلاتو په سیستم بدلیږي.

منابع

(1) D. C. Sharma, D. C. Goyal , PHI publishing. 2017, pp. 29-36.

(2) Dr. M. D. raising hania Integral equations and boundary value problem, new-Delhi. S.chand publisher. 2018, pp. 31-40.

(3) F. G tricomi integral equation, dover publishing. 1955, pp. 49-76.

(4) Bochar, M. An introduction to the study of Antegral Equation. Cambridge Tracts. 1909, pp. 115-117.

(5) Davis, H. T. the Present Status of integral Equation. Indiana University Studies. 1930, pp. 73-74.

(6) Davis, H. T. The theory of Voltera Integral Equation of the Second kind, Indiana University. 1930, pp. 103-106

(7) Heywood, H. B., and Frechet, Fredholm integral Equation and it's application to physic, 3rd. Edition , paris. 1923, pp. 89-93.

(8) Carleman, T. sur integral Equation singularities Symetrique University, Arsskrift. 1987, pp. 3-10.