معادله‌ی دیفرانسیل اویلر به حیث تابع اکسترمال

پوهنیار محمد خالد ستوری[۱۴]
تقریظ‌دهنده: پوهندوی منیژه سرهنگ

مجـله‌ی علمی-تحقیقی حـوزه‌ی علوم
طـبیعی پـوهــنتون کـابـل، ۱ (٤) ۱٤۰۰

چکیده

فرض کنیم P و Q دارای مختصات (x_1, y_1) و (x_2, y_2) و دسته‌ی توابع $y = y(x)$ را در نظر می‌گیریم که شرایط مرزی $y(x_1) = y_1$ و $y(x_2) = y_2$ صدق می‌کنند. یعنی، منحنی آن باید نقاط P و Q را با هم بپیوندد. در آن صـورت منظور یافتن تابع از این دسـته اسـت که انتگرال $I(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx$ را مینیمم کند. باید توجه کرد که این بررسـی تنها نشـان‌دهنده‌ی این مطلب اسـت که اگر $I(y)$ دارای یک مقدار توقف باشـد. در آن صورت منحنی توقف مربوطه باید خط مستقیم باشد. ولی، از هندسه می‌دانیم که $I(y)$ هیچ منحنی مگزیمم‌کننده ندارد ولی یک منحنی مینیمم‌کننده دارد، پس نتیجه می‌گیریم که عملاً کوتاه‌ترین منحنی متصل‌کننده‌ی دو نقطه است.

اصطلاحات کلیدی: تابع اکسترموم؛ تابع مینیمم؛ تابع مگزیمم، معادله‌ی دیفرانسیل؛ مسیر؛ معادله اویلر

Euler Differential Equation for Extreme Function

Jr. Teaching Asstt. Mohammad Khalid Stori

Abstract

Suppose we consider P and Q have coordinates (x_1, y_1) , (x_2, y_2) and we also consider the classes of $y = y(x)$ functions , that the boundary conditions $y(x_1) = y_1$ and $y(x_2) = y_2$ they are true and Its curves should joins P and Q points. In that case the purpose of finding a function of this class to minimize the integral $I(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx$. It should be noted this review only shows that if $I(y)$ a steady value has. In that case the corresponding steady curve should be a straight line. But, we know from geometry that $I(y)$ doesn't have maximizing curve but a minimizing curve has. So we conclude that it is practically the shortest connecting curve of two points.

Keywords: Extreme function; Minimum function; Maximum function; Differential equation; Path; Euler equation

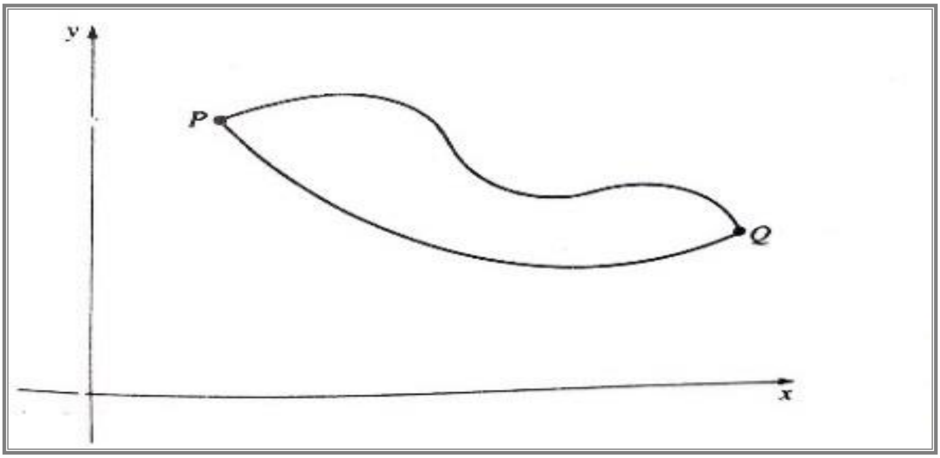
ارجاع

سـتوری، خالـد. (۱٤۰۰). معادله‌ی دیفرانسیل اویلر به حیث تابع اکسـترمال. مجـله‌ی علمی- تحـقیقی حـوزه‌ی علـوم طبیعی پوهـنتون کـابل، شماره ۱ (٤)، صص ۱۶۳ - ۱۷٤.

[۱۴] استاد پوهنځی ریاضیات، پوهنتون کابل

مقدمه

در طول بیش از دو قرن گذشته، حساب تغییرات یکی از شاخه‌های اصلی آنالیز بوده است. این شاخه وسیله‌ی بسیار قوی است که می‌تواند در طیف گسترده‌ی از مسایل ریاضی محض به کار رود. هم‌چنین می‌تواند برای بیان اصول اساسی فزیک ریاضی به صورت بسیار ساده و دقیق مورد استفاده قرار گیرد. با بررسی و مطالعه چند مسأله نمونه از موضوع، به سادگی می‌توان برداشت از کم و کیف آن داشت.



شکل۱: منحنی وصل‌کننده‌ی دو نقطه

فرض می‌کنیم دو نقطه P و Q در ناحیه داده شده اند (شکل۱). بی‌نهایت منحنی موجود اند که این دو نقطه را باهم وصل می‌کنند، و می‌توان پرسید کدام یک از این منحنی‌ها از همه کوتاه‌تر است. پاسخ حسی، البته خط مستقیم است. هم‌چنین می‌توانیم بپرسیم کدام منحنی، در اثر دوران حول محور x سطح با مساحت مینیمم ایجاد خواهد کرد. در این حالت پاسخ به هیچ وجه روشن نیست. هر گاه یک منحنی، به عنوان سیم بدون اصطکاک فرض شود که در صفحه‌ی قایم قرار گرفته است، آن وقت مسأله‌ی قابل توجه دیگر، یافتن یک منحنی است که P را به Q وصل کند و زمان لغزش مهره روی آن به طرف پایین کم‌ترین باشد. این همان مسأله‌ی مشهور کوتاه‌ترین زمان یوهان برنولی است، به ندرت می‌توان به چنین سوال‌های جواب داد، حساب تغییرات روش تحلیلی را در برخورد با این نوع مسایل تأمین می‌کند.

هر محصل حساب دیفرانسیل وانتگرال مقدماتی با مسأله‌ی یافتن نقاط مگزیمم یا مینیمم تابع یک متحوله، آشنایی دارد. مسایل بالا نشان می‌دهد که در حساب تغییرات، کمیتی (مثلاً طول قوس، مساحت سطح، زمان سقوط) را درنظر می‌گیریم که به تمام منحنی بستگی داشته باشد و به دنبال

یافتن آن منحنی هستیم که کمیت مورد سوال را مینیمم کند. حساب تغییرات با مسایل مینیمم مربوط به سطوح نیز سروکار دارد. به طور مثال، هر گاه یک سیم به شکل دل‌خواه خم شود، و در محلول صابون فرو برده شود، آن وقت لایه‌ی صابونی که سطح حلقه را می‌پو شاند به صورت یک سطح خواهد بود با کم‌ترین مساحت که توسط حلقه محدود می‌گردد. مسأله‌ی ریاضی، یافتن این سطح با استفاده از این خاصیت مینیمم و شکل داده شده سیم است (۴).

حساب تغییرات به حیث عامل وحدت بخش در میخانیک و به حیث راهنمایی در تعبیر ریاضی بسیاری از پدیده‌های فزیکی، نقش مهمی را ایفا کرده است. مثلاً، معلوم شده که هر گاه سیستم از ذرات متحرک از جاذبه‌ی متقابل بین آنان پیروی کند، در آن صورت مسیر واقعی آن‌ها منحنی‌های مینیمم‌کننده‌ی انتگرال تفاضل انرژی‌های حرکی و ذخیروی سیستم نسبت به زمان خواهد بود. این قضیه پرکاربرد از میخانیک کلاسیک به افتخار یابنده‌اش به اصل همیلتون شهرت دارد. در فزیک نوین نیز، انیشتین در اثر خود راجع به نسبیت عام از حساب تغییرات استفاده گسترده کرد و شرویدنگر آن را برای یافتن معادله‌ی موج مشهوراش که یکی از اساسات میخانیک کوانتومی‌است، به کار گرفت (۷).

تعدادی از مسایل حساب تغییرات بسیار قدیمی‌اند و توسط یونانیان قدیم مورد بررسی قرار گرفته و در مواردی حل شده اند. پیدایش حساب دیفرانسیل و انتگرال معمولی توسط نیوتن و لیب نیتز انگیزه‌ی مطالعه‌ی تعداد از مسایل تغییراتی شد و برخی از این مسایل با روش‌های ویژه هوشمندانه حل شدند. ولی، این مبحث با کشف معادله‌ی دیفرانسیل اساسی اویلر برای منحنی مینیمم‌کننده، در سال ۱۷۴۴، به حیث شاخه منسجم از آنالیز، وارد صحنه گردید. هدف این مقاله‌ی تطبیقی، از نظر تحلیل موضوع ترکیبی و از نظر ماهیت روش توصیفی بوده و روش جمع‌آوری اطلاعات در این مقاله کتاب‌خانه‌ای می‌باشد.

با بررسی و مطالعه‌ی چند مسأله‌ی نمونه از موضوع، به سادگی می‌توان از کم و کیف آن بردا شت کرد. فرض می‌کنیم دو نقطه P و Q در ناحیه‌ی داده شده بی‌نهایت منحنی موجود اند که این دو نقطه را باهم وصل می‌کنند و می‌توان پرسید کدام یک از این منحنی‌ها از همه کوتاه‌تر است. پاسخ حسی، البته خط مستقیم است. هم‌چنین می‌توانیم بپرسیم کدام منحنی، در اثر دوران حول محور x سطح با مساحت مینیمم ایجاد خواهد کرد. معادله‌ی دیفرانسیل اویلر یکی از جمله معادلات مهم و اساسی حساب تغییرات بوده که در این مقاله از معادله‌ی متذکره به‌حیث تابع اکسترمال (مینیمم‌کننده) برای یک فنکشنل استفاده شده است.

معادله‌ی دیفرانسیل اویلر برای تابع اکسترمال

فرض کنید که تابع قابل پذیرش $y(x)$ چنان باشد که انتگرال

$$I(x)=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')dx \qquad (1)$$

را مینیمم کند، چگونه می‌توان این تابع را یافت؟ با مقایسه‌ی مقادیر I که با توابع قابل پذیرش در همسایگی $y(x)$ متناظر هستند، معادله‌ی دیفرانسیل برای $y(x)$ به دست خواهیم آورد. اندیشه اصلی این است که چون $y(x)$ مقدار مینیمم I را به دست می‌دهد، هر گاه در $y(x)$ اندکی ((اختلال)) ایجاد کنیم، مقدار I افزایش خواهد یافت. این توابع تغییریافته، به طریق زیر ساخته می‌شوند:

$$\eta(x_1)=\eta(x_2)=0 \qquad (2)$$

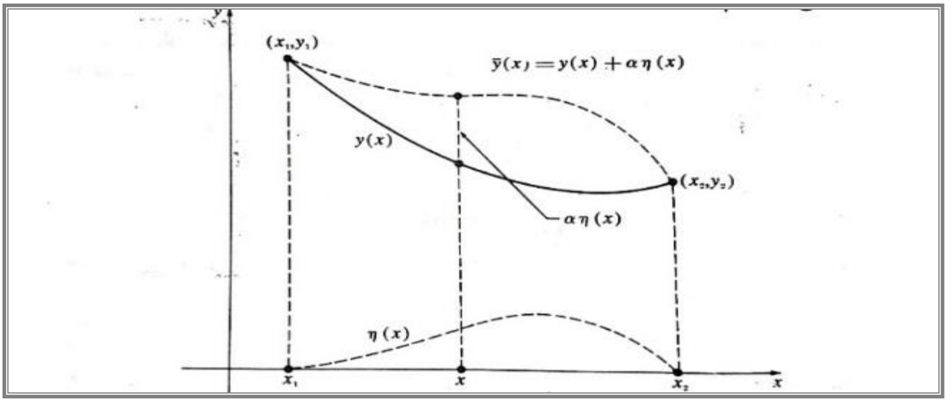
هر گاه α پارامتر کوچک باشد، آن وقت

$$\bar{y}(x)=y(x)+\alpha\eta(x) \qquad (3)$$

نمایش‌گر یک فامیل یک پارامتری از توابع قابل پذیرش است. هم‌چنان که در شکل ۱ نشان داده شده است، انحراف قایم یکی از منحنی‌های این فامیل از منحنی مینیمم‌کننده، $y(x)$، مساوی با $\alpha=0$ است. اهمیت (۳) نا شی از این ا ست که برای هر فامیل از این نوع، یعنی، باهر انتخاب تابع $\eta(x)$، تابع مینیمم‌کننده $y(x)$ به این فامیل متعلق است وبا مقدار $\alpha=0$ مطابقت دارد.

اکنون با انتخاب یک $\eta(x)$، ثابت، مقادیر $\bar{y}(x)=y(x)+\alpha\eta(x)$ و $\bar{y}'(x)=y'(x)+\alpha\eta'(x)$ را در انتگرال (۱) قرار می‌دهیم، و تابع از α به دست می‌آوریم:

$$I(\alpha)=\int_{x_1}^{x_2} f(x,\bar{y},\bar{y}')dx=\int_{x_1}^{x_2} f[x,y(x)+\alpha\eta(x),y'(x)+\alpha\eta'(x)]dx \qquad (4)$$



شکل ۲: حاصل جمع دو تابع

هرگاه $\alpha = 0$ از رابطه (۳) داریم $\bar{y}(x) = y(x)$ وچون $y(x)$ مینیمم‌کننده انتگرال ا ست، می‌دانیم که $I(\alpha)$ باید مینیمم در $\alpha = 0$ دا شته با شد. از حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی می‌دانیم که شرط لازم برای این امر صفر شدن مشتق، $I'(\alpha)$، برای $\alpha = 0$ ا ست: $I'(0) = 0$. مشتق $I(\alpha)$ و $I'(\alpha)$، را می‌توان با مشتق‌گیری از زیر علامت انتگرال در (۴) به دست آورد:

$$I'(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \bar{y}, \bar{y}')dx \qquad (5)$$

براساس قاعده‌ی زنجیری برای مشتق‌گیری از توابع چند متغییره، داریم:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \bar{y}, \bar{y}') = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}}\frac{\partial \bar{y}}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}'}\frac{\partial \bar{y}'}{\partial \alpha} = \frac{\partial f}{\partial \bar{y}}\eta(x) + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}'}\eta'(x)$$

بنابراین،(۵) را می‌توان به شکل

$$I'(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} [\frac{\partial f}{\partial \bar{y}}\eta(x) + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}'}\eta'(x)]dx \qquad (6)$$

نوشت. اما $I'(0) = 0$ بنابراین، با قرار دادن $\alpha = 0$ در (٦) داریم

$$\int_{x_1}^{x_2} [\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'}\eta'(x)]dx = 0 \qquad (7)$$

در این معادله تابع $\eta(x)$ و مشتق آن $\eta'(x)$ ظاهر می‌شوند.با انتگرال‌گیری به روش انقسام از دومین عبارت زیر انتگرال و استفاده از (۲) می‌توان $\eta'(x)$ را حذف کرد.

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'}\eta'(x)dx = [\eta(x)\frac{\partial f}{\partial y'}]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x)\frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'})dx$$

$$= -\int_{x_1}^{x_2} \eta(x)\frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'})dx$$

بنابراین، می‌توان (۷) را به صورت زیر

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x)[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'})]dx = 0 \qquad (8)$$

نوشت. استدلال ما تا این جا بر انتخاب مشخص برای تابع $\eta(x)$ مبتنی بود. اما چون انتگرال (۸) باید برای همه این نوع توابع صفر گردد، بلافاصله به این نتیجه می‌رسیم که عبارت داخل قوس نیز باید صفر شود. این منجر به رابطه‌ی زیر می‌گردد که معادله اویلر است (۲).

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'})dx=0 \qquad (9)$$

مهم است که درک روشنی از ماهیت دقیق نتیجه‌گیری خود داشته باشیم: یعنی هرگاه $y(x)$ یک تابع قابل پذیرش باشد که انتگرال (۱) را مینیمم کند، آن وقت $y(x)$ در معادله اویلر صدق خواهد کرد. فرض کنید تابع قابل پذیرش مانند $y(x)$ وجود دارد که این معادله را ارضا می‌کند. آیا این به معنی این است که $y(x)$ ، I را مینیمم می‌کند؟ لزوماً چنین نیست. این حالت شبیه به حالت در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی است که در آن تابع مانند $g(x)$ که مشتق‌اش در نقطه x_0 صفر است، می‌تواند در این نقطه دارای مگزیمم، مینیمم و یا نقطه عطف باشد. هنگام که نخواهیم تمایزی بین این حالات قایل شویم، این حالات را معمولاً مقادیرتوقف $g(x)$ می‌نامیم و نقاطه x_0 را که در آن‌ها این حالات پیش می‌آیند نقاط توقف می‌گوییم.

به همین ترتیب، شرط $I'(0)=0$ ممکن است به جای مینیمم، بیان‌گر یک مگزیمم یا نقطه‌ی عطف $I(\alpha)$ در $\alpha=0$ باشد. معمول است که هر جواب قابل پذیرش معادله‌ی اویلر را تابع توقف یا منحنی توقف و مقدار متناظر انتگرال (۱) را مقدار توقف این انتگرال نامند (بدون این‌که خود را به یکی از حالات ممکن، مقید کرده باشیم). علاوه از آن، جواب‌های از معادله‌ی اویلر راکه مقید به شرایط مرزی نیستند، توابع اکسترمال می‌گوییم (۱).

در حساب دیفرانسیل و انتگرال برای ارایه‌ی شرایط کافی جهت تشخیص یک نوع مقدار توقف از دیگر، مشتق دوم را به کار می‌گیریم. شرایط کافی مشابه در حساب تغییرات نیز وجود دارد(ولی چون کاملاً پیچیده هستند، آن‌ها را در این جا مورد برر سی قرار نخواهیم داد). در تطبیقات واقعی، کیفیت هندسی یا فزیکی مسأله‌ی مورد بحث غالباً مارا قادر می‌سازد تعیین کنیم که آیا تابع توقف خاص انتگرال را مگزیمم می‌کند یا مینیمم (یا هیچ کدام). خواننده علاقمند به شرایط کافی و دیگر مسایل نظری می‌تواند مباحث کافی در این زمینه‌ها را که در مرجع (۵) معرفی کرده ایم مراجعه کنند.

معادله‌ی اویلر (۹)، به شکل که ارایه گردید، چندان واضح نیست. برای تفسیر آن و تبدیل‌اش به یک وسیله‌ی مفید، مطلب را با تأکید براین نکته آغاز می‌کنیم که مشتقات قسمی $\frac{\partial f}{\partial y}$ و $\frac{\partial f}{\partial y'}$ با احتساب

x، y و y' به عنوان متحول‌های مستقل محاسبه شده اند. اما، در حالت کلی $\frac{\partial f}{\partial y'}$ تابع صریح از x است، و از طریق y و y' نیز تابع ضمنی از x می‌باشد، بنابراین، اولین عبارت در(۹) را می‌توان به شکل بسط‌یافته زیر نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y'})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y'})\frac{dy}{dx}+\frac{\partial}{\partial y'}(\frac{\partial f}{\partial y'})\frac{dy'}{dx}$$

به این ترتیب معادله‌ی اویلر به صورت زیر درخواهد آمد:

$$f_{y'y'}\frac{d^2y}{dx^2}+f_{y'y}\frac{dy}{dx}+(f_{y'x}-f_y)=0 \qquad (10)$$

بدون از حالت $f_{y'y'}=0$ ، معادله‌ی بالا از مرتبه‌ی دوم است، پس عموماً توابع اکسترمال (جواب‌های این معادله) یک فامیل دو پارامتری از منحنی‌ها را تشکیل می‌دهند و در بین این‌ها، توابع توقف توابعی هستند که در آن‌ها این دو پارامتر چنان انتخاب شده اند که در شرایط مرزی داده شده صدق می‌کنند. حل معادله‌ی مرتبه‌ی دوم غیر خطی مانند (۱۰) عموماً امکان‌پذیر نیست، ولی خوش‌بختانه بسیاری از تطبیقات منجر به حالت‌های خاصی می‌شوند که قابل حل هستند:

حالت الف. هر گاه x و y در تابع f ظاهر نشوند، معادله‌ی اویلر به صورت زیر

$$f_{y'y'}\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

تبدیل می‌شود، و اگر $f_{y'y'}\neq 0$ ، آن وقت $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ و $y=c_1x+c_2$ و بنابراین، توابع اکسترمال همگی خطوط مستقیم هستند (۱۰).

حالت ب. هرگاه y در تابع f ظاهر نگردد، معادله‌ی اویلر به

$$\frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'})=0$$

تبدیل می‌شود و از این رابطه می‌توان بلافاصله انتگرال گرفت و به معادله‌ی مرتبه اول

$$\frac{\partial f}{\partial y'}=c_1$$

برای تابع اکسترمال دست یافت (۱۲).

حالت ج. هر گاه x در f موجود نباشد، آن وقت انتگرال گیری از معادله‌ی اویلر به

$$\frac{\partial f}{\partial y'} y' - f = c_1$$

منجر می‌شود. این مطلب از اتحاد

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} y' - f\right) = y'\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y}\right] - \frac{\partial f}{\partial x}$$

نتیجه می‌شود زیرا $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ و جمله داخل قوس طرف راست، بنابر معادله‌ی اویلر، صفر است (۱۱).

مثال ۱: برای پیدا کردن کوتاه‌ترین منحنی واصل بین دو نقطه (x_1, y_1) و (x_2, y_2) که به طور حسی می‌دانیم یک خط مستقیم است، باید انتگرال طول قوس را مینیمم کنیم

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

متحول‌های x و y در $f(y') = \sqrt{1 + (y')^2}$ ظاهر نشده اند. بنابراین، این مسأله به حالت الف مربوط می‌شود. چون؛

$$f_{y'y'} = \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = \frac{1}{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}} \neq 0$$

از حالت الف داریم که اکسترمال ها یک دسته دو پارامتری از خطوط مستقیم به صورت $y = c_1 x + c_2$ هستند. شرایط مرزی، خط

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad (11)$$

را به عنوان منحنی توقف به دست می‌دهد، البته این همان خط مستقیمی است که دو نقطه مزبور را با هم وصل می‌کند. باید توجه کرد که این بررسی تنها نمایانگر این مطلب است که اگر I دارای یک مقدار توقف باشد، آن وقت منحنی توقف مربوطه باید خط مستقیم (۱۱) باشد. ولی، از هندسه

می‌دانیم که I هیچ منحنی مگزیمم‌کننده‌ی ندارد ولی یک منحنی مینیمم‌کننده دارد، پس به این طریق نتیجه می‌گیریم که (۱۱) عقلاً کوتاه‌ترین منحنی متصل‌کننده دو نقطه است.

در این مثال از طریق تحلیلی به نتیجه واضح دست یافتیم. یک مسأله به مراتب مشکل‌تر و جالب‌تر یافتن کوتاه‌ترین منحنی بین دو نقطه‌ی ثابت از یک صفحه مفروض است به طوری که این منحنی به طور کامل بر صفحه واقع باشد. این منحنی‌ها جیودوزیک خوانده می‌شود و بررسی خواص آنان یکی از موضوعات اصلی شاخه‌یی از ریاضیات، موسوم به هندسه دیفرانسیل است (۴).

مثال ۲: برای یافتن منحنی واصل بین نقاط (x_1, y_1) و (x_2, y_2) که سطح حاصل از دوران حول محور x دارای مساحت مینیمم باشد، باید انتگرال زیر

$$I = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}\, dx \qquad (12)$$

را مینیمم کنیم. متحول x در $f(y, y') = 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}$ ظاهر نشده است. بنابراین، حالت ج می‌دانیم که، معادله‌ی اویلر به صورت زیر

$$\frac{y(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} - y\sqrt{1+(y')^2} = c_1$$

در می‌آید، که بعد از ساده شدن به

$$c_1 y' = \sqrt{y^2 - c_1^2}$$

تبدیل می‌شود. با جدا کردن متحول‌ها و انتگرال‌گیری، خواهیم داشت

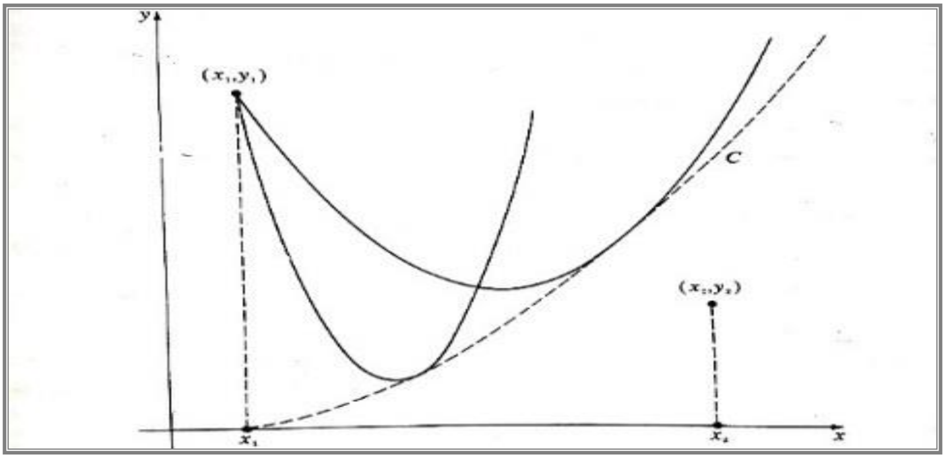
$$x = c_1\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - c_1^2}} = c_1 \log\left(\frac{y+\sqrt{y^2-c_1^2}}{c_1}\right) + c_2$$

که باحل آن بر حسب y خواهیم داشت

$$y = c_1 \cosh\left(\frac{x-c_2}{c_1}\right) \qquad (13)$$

بنابراین اکسترمال‌ها به صورت منحنی‌های زنجیری خواهند بود و صفحه با سطح مینیمم (اگر موجود باشد) از دوران منحنی زنجیری حاصل می‌گردد. مسأله‌ی بعدی این است که ببینیم آیا پارامترهای c_1 و c_2 را می‌توان چنان یافت که منحنی (۱۳) نقاط (x_1, y_1) و (x_2, y_2) را به هم متصل نماید یا نه (۸).

انتخاب این پارامترها به گونه‌ی غیر منتظره مشـــکل اســـت. هر گاه منحنی (۱۳) از اولین نقطه یعنی (x_1, y_1) ، عبور کند، آن وقت یک پارامتر آزاد باقی می‌ماند. دو عضـــو از این فامیل یک پارامتری در شکل(۲) نشان داده شده اند.



شکل۳: مسیر منحنی‌ها

می‌توان ثابت کرد که این منحنی‌ها همگی بر منحنی نقطه‌چین C مماس هســـتند و بنابراین، هیچ یک از منحنی های این فامیل نمی‌توا ند C را قطع کند. به این ترتیب هنگامی که دومین نقطه (x_2, y_2) زیر C قرار داشته است.

همان طور که در شکل(۲) نشان داده شده است، هیچ منحنی زنجیری ما بر هر دو نقطه موجود نیست و هیچ گونه تابع توقف وجود ندارد. در این حالت می‌توان دریافت که سطوح کوچک‌تر و کوچک‌تر توســـط منحنی‌ها ایجاد می‌گردند که به خط نقطه‌چین که نقطه‌ی (x_1, y_1) را به $(x_1, 0)$ و این نقطه رابه $(x_2, 0)$ و باالاخره نقطه‌ی اخیر را به (x_2, y_2) وصـــل می‌کند، میل می‌کنند و بنابراین، هیچ منحنی قابل پذیرش که یک صــفحه‌ی مینیمم تولید کند، وجود ندارد. در حالت که نقطه، دوم بالای منحنی C قرار گیرد، دو منحنی زنجیری از این دو نقطه می‌گذرند، و بنابراین دو تابع توقف موجود اند لاکن تنها منحنی زنجیری بالایی، صـــفحه با ســـطح مینیمم را ایجاد می‌کند. سرانجام، زمان که نقطه‌ی دوم روی C قرار گیرد، تنها یک تابع توقف موجود اســـت، ولی صــــفحه‌ی ایجادشـــده به وسیله‌ی آن دارای سطح مینیمم نخواهد بود (۹).

مناقشه

با در نظر داشت پیشینه‌ی موضوع و طرح موضوع منظور یافتن تابع است که انتگرال به صورت $I(y)=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')dx$ را مینیمم کند. برای مشاهده‌ی این‌که این مسأله به راستی در برگیرنده‌ی سایر مسایل است، توجه می‌کنیم که طول منحنی برابر است با $\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(y')^2}\,dx$ و مساحت سطح حاصل از دوران آن، حول محور x عبارت است از $\int_{x_1}^{x_2} 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$ در مورد منحنی با سریع‌ترین سقوط، بهتر است سیستم مختصات را تغییر دهیم و P را به عنوان مبدأ اختیار کنیم. چون سرعت $v=\frac{ds}{dt}$ از رابطه $v=\sqrt{2gy}$ به دست می‌آید، زمان کل سقوط انتگرال $\frac{ds}{v}$ است و انتگرال $\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx$ باید مینیمم شود از این رو، $f(x,y,y')$ که در سه حالت فوق به ترتیب به شکل‌های $\sqrt{1+(y')^2}$ ، $2\pi y\sqrt{1+(y')^2}$ و $\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}$ عرض وجود نموده است.

نتیجه‌گیری

از معادله‌ی دیفرانسیل اویلر برای تابع اکسترمال نتایج زیر به‌دست می‌آید.

هر گاه $y(x)$ یک تابع قابل پذیرش باشد که انتگرال (۱) را مینیمم کند، آن وقت $y(x)$ در معادله اویلر صدق خواهد کرد. هنگام که نخواهیم تمایزی بین این حالات قایل شویم، این حالات را معمولاً مقادیر توقف $g(x)$ می‌نامیم، و نقاطه x_0 را که در آن‌ها این حالات پیش می‌آیند، نقاط توقف می‌گوییم. جواب‌های از معادله‌ی اویلر راکه مقید به شرایط مرزی نیستند، توابع اکسترمال می‌گوییم.

توابع اکسترمال (جواب‌های این معادله) یک فامیل دو پارامتری از منحنی‌ها را تشکیل می‌دهند، و در بین این‌ها، توابع توقف توابعی هستند که در آن‌ها این دو پارامتر چنان انتخاب شده اند که در شرایط مرزی داده شده صدق می‌کنند. حل معادله‌ی مرتبهی دوم غیر خطی مانند (۱۰) عموماً امکان‌پذیر نیست، ولی خوش‌بختانه بسیاری از تطبیقات منجر به حالت‌های خاصی می‌شوند که قابل حل هستند. محققان می‌تواند در زمان آینده برای اکسترمال همچو مسایل بدون قید و شرط همه انواع توابع را معرفی و روی آن تحقیق صورت بگیرد.

منابع

(1) Abraham, R. and Marsden, j. foundations of mechanics,1985. 2nd ed., Benjamin/ Cummings puble.com.

(2) Anco, s.c.and Bluman, G.W., “Derivation of conservation laws from nonlocal symmetries of Differential Equation,” J. Math. Phys. 1996; 37 (5), pp. 2361-2375.

(3) Bernstein, S.N., “sur les equations du Calculus des variation “Ann. Sci Ecolenorm, sup. 1912; 29, pp. 431-585.

(4) Birkhoff, G. and Rota, G., ordinary Differential Equation, 1989. 4th ed., john Wily and sons.

(5) Bloze, G.A., Lecture on the Calculus of variation, 1931. G.E stechert. and co.

(6) Browder, F., ed. Mathematical Development Arising from Hilbert Problems, Proceedings of the symposium in pure mathematics 1976, of the American Mathematical Society, vol. 28.

(7) Caratheodory, C., calculus of variations and partial Differential Equations, 2008, of the first order, Chelsea.

(8) Courant, R. and Hilbert., D., Methods of mathematical Physics, 1953, vol. 1, john Wiley and sons.

(9) Forsyth, A.R., calculus of variation with applications, 1987, Dover.

(10) Giaquinta, M. and Hildebrandt, S., Calculus of variations II, 1996, the lagrangian formalism, springer-verlag.

(11) Kalnins, E, G., separation of Variables for Riemannian Spaces of constant curvature, 2013. Pitman Monograph, longman.

(12) Kreyszig, E., Advanced Engineering Mathematics, 1979, 4th ed., University of Toronto press.