مجـلهی علمی-تـحقیقی حـوزهی علوم
طـبیعی پـوهــنتون کـابـل، ۱ (٤) ۱٤۰۰

مقایسه‌ی اهتزازات هارمونیکی و غیرهارمونیکی

پوهندوی رویا سدید[۱۷]

تقریظ‌دهنده: پوهندوی دکتور داوود میرزایی

چکیده

در این مقاله اهتزازات هارمونیک و غیر هارمونیک را از نظر تیوریکی مورد مقایســـه قرارداده و تفاوت‌های عمده بین اهتزازات هارمونیک و غیرهارمونیک را بررســـی می‌نماییم. هرحرکت تناوبی و تکرار شـــونده که به حول موقعیت تعادل صورت می‌گیرد، به‌نام حرکت اهتزازی یاد می‌گردد. در حرکت های اهتزازی دیده می‌شود که متمادیا تبدیل انرژی حرکی به انرژی پوتانشیل و برعکس تبدیل انرژی پوتانشیل به حرکی موجود است. اهتزازات هارمونیکی دارای انرژی پوتانشیل $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ بوده وگراف انرژی پوتانشیل آن بهشکل پارابول می‌باشد و فریکونسی آن بهشکل $\omega = \sqrt{\frac{C_2}{m}}$ بوده و حدود هارمونیک بلنددارای فریکونســی‌های $2\omega, 3\omega, 4\omega.....$ می‌باشـــد و در اهتزازات غیرهارمونیک قوه دارای حدودی بوده که حد اول آن خطی بوده و حدود دیگر آن تابع خطی نبوده و با اختلال بسیار کوچک از اهتزاز هارمونیکی ساده فرق می‌نماید. اهتزازات غیرهارمونیکی اهتزازاتی اند که انرژی پوتانشیل آن به شکل پارابول نمی‌باشد.

اصطلاحات کلیدی: اهتزازات؛ هارمونیکی؛ غیرهارمونیکی؛ فریکونسی؛ انرژی حرکی؛ انرژی پوتانشیل

Comparison of Harmonic and Non-Harmonic Vibrations

Asstt. Prof. Roya Sadid

Abstract

In this article, we compare the harmonic and non-harmonic vibrations theoretically and examine the main differences between harmonic and non-harmonic vibrations. Every Periodic and repetitive motion that revolves around the position of equilibrium is called vibrational motion. In vibrational movements, it is seen that there is a constant conversion of kinetic energy into potential energy and vice versa, conversion of potential energy into kinetic energy. The harmonic vibrations have potential energy $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ and its potential energy graph is in the form of a parabola and frequency is $\omega = \sqrt{\frac{C_2}{m}}$ and the long harmonic range has frequencies of $2\omega, 3\omega, 4\omega...$ The Non-harmonic vibrations of power have limits whose limits are linear and the others are not linear, and very little disturbance differs from simple harmonic vibrations. Non-harmonic vibrations are vibrations whose potential energy is not in the form of a parabola.

Keywords: Vibration; Harmonic; Non-Harmonic; Frequency; Kinetic energy; potential energy

ارجاع

سدید، رویا. (۱٤۰۰). مقایسه‌ی اهتزازات هارمونیکی و غیرهارمونیکی. مجـله‌ی علمی- تحـقیقی حـوزه‌ی علـوم طبیعی پوهـنتون کـابل، شماره ۱ (٤)، صص ۱۹۵ - ۲۰۷.

[۱۷] استاد پوهنځی فزیک، پوهنتون کابل

مقدمه

در این مقاله می‌خواهیم اهتزازات هارمونیکی و غیرهارمونیکی را به طور مقایسه‌یی بررسی نماییم. برای این منظور تأثیرات قوه را بالای اجسام مطالعه می‌نماییم. دیده می‌شود وقتی‌که بالای یک جسم قوه وارد شود، باعث حرکت جسم می‌گردد. در طبیعت و تکنالوزی تعداد زیادی پدیده‌های متناوب وجود دارند که بر اساس انواع مختلف اهتزازات و امواج شکل می‌گیرند؛ مانند پدیده صوت، میکانیزم عملیه ساعت، جریان متناوب برق در دوره‌های اهتزازات الکترومقناطیسی و غیره که موضوع مورد بحث ما اهتزازات هارمونیکی وغیرهارمونیکی است.

در اهتزازات هارمونیکی قوه تابع خطی فاصله بوده و به حالت متناظر از موقعیت تعادل آن اهتزاز صورت می‌گیرد. ولی در اهتزازات غیرهارمونیکی به شکل غیرمتناظر به حول موقعیت تعادل اهتزاز می‌نمایید. هرگاه رقاصه را از محل تعادل پایدار آن برطرف نموده و آن‌را از ادانه رها کنیم، دیده می‌شود که رقاصه به‌حول محل تعادل خویش این طرف و آن طرف حرکت می‌کند. در تمام این گونه حرکت‌ها حقیقت این است که باید حرکت‌های متناوب اجسام به‌حول موقعیت تعادل آن اجرا گردد. این نوع حرکت تناوبی یک جسم را که به‌حول موقعیت تعادل صورت می‌گیرد، به‌نام حرکت اهتزازی یاد می‌کنند.

اهتزازات هارمونیکی

هرگاه بالای جسم یک قوه وارد شود، حرکت همان جسم تعجیلی است. حرکت‌های تعجیلی را می‌توان به حرکت‌های خطی و دورانی دسته‌بندی نمود. یک نوع دیگری از حرکت‌ها را که به‌نام حرکت اهتزازی یاد می‌شود مورد بررسی و مطالعه قرار می‌دهیم.

در یک تیوب شیشه‌یی U مانند مقدار مایع رنگه را می‌ریزیم. اگر یک شاخه‌ی مایع را به طرف پائین فشار بدهیم، مایع به‌طرف بالا و پایین به‌حول موقعیت تعادل پایدار، یعنی جایی‌که مایع در دو شاخه‌ی نل یک سان ا ست، اهتزاز می‌نماید. حرکت م شابه تو سط یک رقا صه اجرا می‌گردد، یعنی هرگاه رقاصه را از محل تعادل پایدار آن برطرف نموده وآن‌را آزادانه رهاکنیم، دیده می‌شود که رقاصه به‌حول محل تعادل خویش این طرف وآن طرف حرکت می‌کند.

در تمام این گونه حرکت‌ها حقیقت این است که باید حرکت‌های متناوب اجسام به‌حول موقعیت تعادل آن اجرا گردد. این نوع حرکت تناوبی یک جسم را که به‌حول موقعیت تعادل صورت می‌گیرد، به‌نام حرکت اهتزازی یاد می‌کنند (۳).

حرکت هارمونیکی ساده

ذره که به امتداد محور x حرکت می‌نماید، دارای حرکت هارمونیکی ساده است وقتی که فاصله‌ی تغییر مکان آن نسبت به مبدأ کمیات وضعیه‌ی سیستم به تابع زمان توسط رابطه‌ی ذیل داده شده باشد:

$$X = A\cos(\omega t + \alpha) \qquad (1)$$

کمیت $(\omega t + \alpha)$ به‌نام فاز اهتزاز یاد گردیده و α فاز اولی بوده وقتی که $t=0$ باشد. چون اهتزاز هارمونیکی را ازجنس cosine تعریف نمودیم می‌توانیم آن‌را ازجنس sine نیز قرار ذیل تعریف نمود:

$$X = A\sin(\omega t + \alpha) \qquad (2)$$

تنها تفاوت در فرق فاز اولی به اندازه $\frac{\pi}{2}$ است. چون تابع cosine و sine بین قیمت های ± 1 تغییر می نماید، پس تغییر مکان ذره‌ی اهتزازکننده از $-A$ تا $+A$ تحول می نماید. این تغییر مکان از مبدأ به‌نام امپلیتود اهتزاز هارمونیکی یاد می‌گردد. تابع cosine بعد از طی نمودن زاویه 2π تکرار می‌گردد. بنابرآن تغییر مکان ذره خود به خود بعد از انتروال زمانی $\frac{2\pi}{\omega}$ تکرار می‌شود. چون حرکت اهتزاز هارمونیکی حرکت پریودیکی است، پریود آن $T = \frac{2\pi}{\omega}$ و فریکونسی f حرکت هارمونیکی ساده مساوی به تعداد اهتزازات فی واحد وقت یعنی $f = \frac{1}{T}$ است. کمیت ω به‌نام فریکونسی زاویوی ذره‌ی اهتزازکننده یاد می‌شود. پس داریم:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

سرعت ذره عبارت است از:

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \alpha)$$

متشابهاً تعجیل مساوی است به:

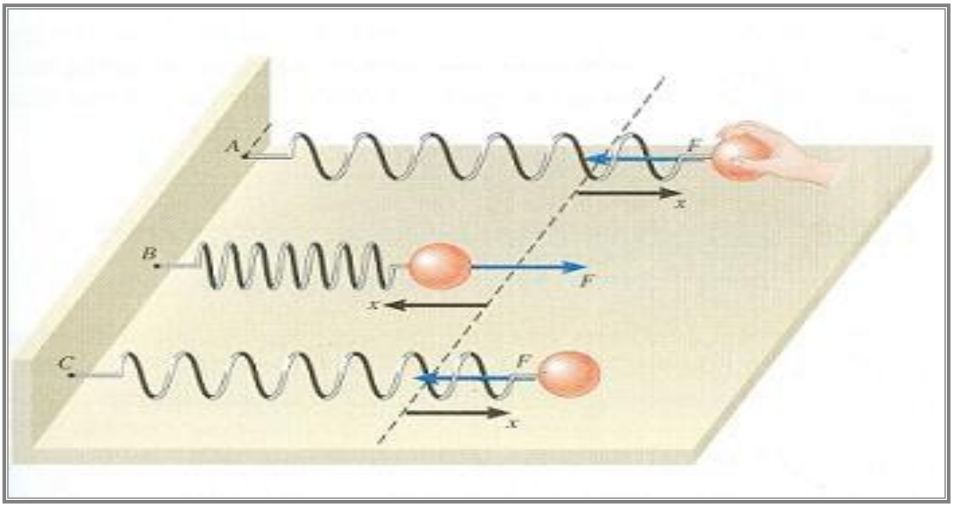
$$a = -A\omega^2\cos(\omega t + \alpha) \qquad (3)$$

قوه و انرژی در حرکت هارمونیکی ساده

جهت این‌که قوه‌ی را که باعث حرکت اهتزازی هارمونیکی ذره با کتله m می‌گردد، دریافت نماییم، معادله $F = -ma$ را در نظر گرفته با استفا ده از معادله (۳) می یابیم:

$$F = -mx\omega^2 \qquad (4)$$

در حالی‌که $m\omega^2 = k$ ثابت بوده از این‌جا $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ا ست. معادله‌ی (۴) به و ضاحت ن شان می‌دهد که در حرکت هارمونیکی ســاده قوه متناســب به تغییر مکان به جهت مخالف آن می‌باشــد. بنابرآن قوه همی شه به جهت مبدأO که عبارت از نقطه‌ی تعادل ا ست، موجه می‌با شد ، چون در مبدأ F=0اســت زیرا x=0 می‌باشــد. به خاطر باید داشــت که قوه‌ی F جاذبه اســت و مرکز جاذبه نقطه O می‌باشد. این حالت را می‌توان در یک فنر مشاهده نمود قرار شکل (۱).



شکل ۱: اهتزاز رقاصه‌ی فنری

فرضاً x تغییر مکان جسم ازحالت تعادل آن با شد. در صورتی‌که x = ۰ با شد، فنرحالت عادی خود را ن شان می‌دهد. هنگامی‌که ج سم به‌طرف را ست تغییر مکان نماید، x مثبت بوده و فنر کش می‌گردد. دراین حالت $F = -kx$ اســت. درحالی‌که k ثابت تناســب بوده و بنام ثابت فنر یا ثابت قوه یاد می‌گردد. رابطه‌ی فوق هم برای قیمت‌های منفی و هم برای قیمت‌های مثبت x قابل تطبیق می‌باشــد. در هردو حالت F و x علامات مختلف یک‌دیگر را دارند.

فرضاً جسم را به‌طرف راست تا فاصله A تغییر مکان داده و دو باره آن‌را بدون سرعت اولیه رها نماییم، در این حالــــت فنرقوه‌یی را به‌طرف موقعیت تعادل وارد نمـــــوده که در نتیجه جسم به‌طرف این موقعیت تعجیل می‌گیرد. این تعجیل ثابت نبوده، زیرا وقتی‌که جســم به نقطه‌ی تعادل خویش نزدیک می‌گـردد، قوه تناقـص می‌نماید و هـنگامی‌که جســم به x = ۰ برسـد، قوه و تعجیـــل هـردو به صفـر

تقرب می‌کنند، اما سرعت را که جسم حاصل نموده ثابت نبوده، زیرا وقتی‌که جسم به نقطه‌ی تعادل خویش نزدیک می‌گردد، قوه تناقص می‌نماید و هنگامی‌که جسم به $x = 0$ برسد، قوه و تعجیل هردو به صفر تقرب می‌کنند، اما سرعت را که جسم حاصل نموده باعث می‌شود تاجسم را از حالت تعادل عبور داده و جسم حرکت خود را به‌طرف چپ ادامه دهد (۱).

دراین‌جا جهت قوه معکوس گردیده و سرعت جسم تناقص می‌نماید و باالاخره جسم در یک نقطه به‌طرف چپ نقطه‌ی O به حالت سکون درآمده و دو باره به‌طرف حالت تعادل شروع به حرکت می‌نماید. از معادلات فو ق می‌یابیم: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (5)$$

معادله‌ی (۵) پریود و فریکونسی حرکت هارمونیکی ساده را از جنس کتله‌ی ذره و ثابت ار تجاعیت قوه‌ی عامل نشان می‌دهد. انرژی حرکی ذره عبارت است از:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \alpha)$$

$$E_k = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\left[1 - \cos^2(\omega t + \alpha)\right] = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2) \qquad (6)$$

به خاطر باید داشت که انرژی حرکی در مرکز $(x=0)$ اعظمی بوده و در دورترین نقاط از مرکز $(x = \pm A)$ صفر است.

برای انرژی پوتانشیل معادله‌ی $F = -\frac{dE_p}{dx}$ را در نظر گرفته با استفاده از معادله‌ی (۴) می‌یابیم:

$$\frac{dE_p}{dx} = kx$$

انرژی پوتانشیل را در مبدأ یا موقعیت تعادل $(x=0)$ انتخاب نموده و از این معادله انتیگرال گرفته می‌یابیم:

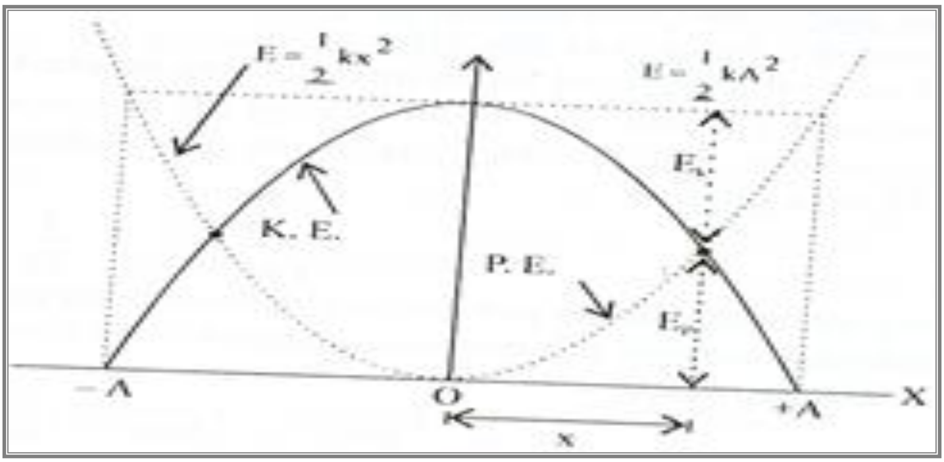
$$\int_0^{E_p} dE_p = \int_0^{x_0} kx\,dx$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \qquad (7)$$

انرژی پوتانشیل در مبدأ یا موقعیت تعادل (x=0) صفر و در دورترین نقاط از موقعیت تعادل ($x=\pm A$) اعظمی است. از حاصل جمع معادلات (٦) و (٧) انرژی مجموعی حرکت هارمونیکی ساده عبارت است:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} kA^2$$

به‌خاطر باید داشت که انرژی مجموعی حرکت هارمونیکی ساده کمیت ثابت است. انرژی زمانی ثابت است که قوه عامل محافظوی باشد. در حرکت اهتزازی دیده می‌شود که متمادیاً تبدیل انرژی حرکی به انرژی پوتانشیل و برعکس تبدیل انرژی پوتانشیل به حرکی موجود است. وقتی‌که ذره از موقعیت تعادل دور می‌گردد، انرژی پوتانشیل آن تزاید نموده و انرژی حرکی آن تناقص می‌کند و برعکس.



شکل ۲: گراف انرژی در حرکت هارمونیکی

شکل (۲) گراف انرژی پو تا نشیل را در حرکت هارمونیکی ساده نشان می‌دهد که پارا بولا ست. از شکل مذکور انرژی پوتانشل عبارت است (۷).

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2$$

دینامیک حر کت هارمونیکی ساده

در مبحث قبلی حرکت هارمونیکی ساده را با استفاده از خواص کینماتیکی تعریف نموده و توسط معادله‌ی (۱) آن‌را ارائه نمودیم. سپس انواع قوه‌ها را مطالعه کردیم که جهت ایجاد حرکت هارمونیکی ساده ضرورت بود که در معادله‌ی(۴) نشان داده شده اند. می‌توانیم نتایج حا صله‌ی فوق را با روش

معکوس نیز به‌دست آوریم. همیشه می‌توان نشان داد که قوه‌ی ارتجاعی متناسب به تغییر مکان حرکت محصله‌ی هارمونیکی ساده است. معادله‌ی حرکت ذره که بالای آن قوه برگرداننده F=-k x عمل می‌نماید عبارت است :

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0$$

$\omega^2=\frac{k}{m}$ وضع نموده می یابیم:

$$x_1=C_1e^{i\omega t}$$

$$x_2=C_2e^{-i\omega t}$$

حل عمومی عبارت است :

$$x=Ce^{i\omega t}+Ce^{-i\omega t}$$
$$x=(C_1+C_2)\cos\omega t(C_1-C_2)\sin\omega t \qquad (8)$$

به‌خاطر باید داشت که x موهومی نبوده بلکه حقیقی می‌باشد. در حقیقت C_1 و C_2 اعداد موهومی بوده طوری‌که (C_1+C_2) حقیقی و (C_1-C_2) موهومی خالص است. فرض می‌نماییم که:

$$(C_1+C_2)=A\sin\varphi$$
$$i(C_1-C_2)=A\cos\varphi$$

اند. در حالی‌که A و ϕ دو ثابت حقیقی مستقل می‌باشند، در نتیجه می‌یابیم :

$$x=A\sin(\omega t+\varphi) \qquad (9)$$

معادله‌ی (۹) عبارت از حل عادی معادله‌ی اهتزاز هارمونیکی خطی بوده، یعنی ذره حرکت هارمونیکی ساده را اجرا می‌نماید وقتی‌که قوه F= - k x بالای آن عمل نماید. این معادله دارای دو ثابت اختیاری بوده که یکی امپلیتود A و دیگری فاز ϕ است. به‌خاطر باید داشت که این حل معادل به $x=A\cos(\omega t+\varphi)$ است. اگر

$$(C_1+C_2)=A\cos\varphi$$
$$i(C_1-C_2)=A\sin\varphi$$

وضع گردند. هر دو حل به صورت مساویانه قابل تطبیق می‌باشند. برای این‌که دانسته شود کدام حل برای حرکت داده شده قابل تطبیق است، مربوط به زاویه‌ی فاز اولی φ در t=0 می‌باشد. به صورت عموم هردو حل می‌تواند به‌شکل ذیل تحریر گردند:

$$x = Ae^{i(\omega t+\varphi)}$$

از این جا نتیجه می‌شود که قسمت حقیقی $A\cos(\omega t+\varphi)$ و ضریب قسمت موهومی یعنی $A=\sin(\omega t+\varphi)$ مطابقت به حالت واقعی معادله می‌نماید. در نتیجه گفته می‌توانیم که قوه‌ی برگرداندن متناسب به تغییر مکان بوده وحرکت هارمونیکی ساده را به‌وجود می‌آورد (۵).

انرژی اهتزازکننده‌ی هارمونیکی ساده

قبلاً مطالعه نمودیم که قوه F= - k x قوه‌ی محافظوی بوده پس انرژی مجموعی میخانیکی (E_k+E_p) اهتزازکننده‌ی هارمونیکی ثابت است. در هر لحظه انرژی پوتانشیل E_p اهتزازکننده‌ی هارمونیکی عبارت است از:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\sin^2(\omega t+\varphi)$$

$$E_p = \frac{1}{2}kA^2\left(\frac{1-\cos 2(\omega t+\varphi)}{2}\right)$$

$$E_p = \frac{1}{4}m\omega^2 A^2(1-\cos 2(\omega t+\varphi)) \qquad (10)$$

دیده می‌شود که انرژی پوتانشیل اهتزازکننده به‌صورت پریودیک با فریکونسی دوچند 2ω تحول می‌نماید. درحالی‌که ω فریکونسی زاویوی است. انرژی پوتانشیل در $x=\pm A$ دارای قیمت اعظمی $E_p = \frac{1}{2}kA^2$ و در x=0 دارای قیمت صفر یعنی $E_p = 0$ می‌باشد. انرژی حرکی عبارت است (۲):

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\cos^2(\omega t+\varphi)$$

$$E_p = \frac{1}{2}kA^2\left[\frac{1+\cos 2(\omega t+\varphi)}{2}\right]$$

$$E_p = \frac{1}{4}kA^2\left[1+\cos 2(\omega t+\varphi)\right]$$

$$= \frac{1}{4}m\omega^2 A^2\left[1+\cos 2(\omega t+\varphi)\right] \qquad (11)$$

انرژی حرکی نیز به‌صـــورت پریودیک با فریکونســـی 2ω یعنی دو چند فریکونســـی حرکت تحول می‌نماید. هنگامی‌که سرعت اعظمی‌با شد، انرژی حرکی اعظمی می‌با شد. سرعت زمان اعظمی ا ست که x=0 باشد یعنی:

$$E_k = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} kA^2$$

وقتی‌که تغییر مکان اعظمی باشـــد ($\pm A$)، در آن حالت v=0 بوده و $E_k = 0$ اســـت. پس گفته می‌توانیم که در دورترین نقاطی از موقعیت تعادل تمام انرژی عبارت از انرژی پو تانشـــیل و در موقعیت تعادل تمام انرژی عبارت از انرژی حرکی اســـت. در موقعیت‌های بین صـــفر و A± انرژی قسماً حرکی و قسماً پوتانشیل می‌با شند. در نتیجه گفته می‌توانیم که انرژی حرکی و انرژی پوتانشیل هر دو با فریکونســـی 2ω اهتزاز می‌کنند (معادلات ۱۲ و۱۱ دیده شـــوند) در نتیجه انرژی مجموعی میخانیکی حرکت هارمونیکی ساده عبارت است از (۴):

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{4}KA^2[1+\cos 2(\omega t+\phi)] + \frac{1}{4}KA^2[1-\cos 2(\omega t+\phi)] = \frac{1}{2}KA^2 \quad (12)$$

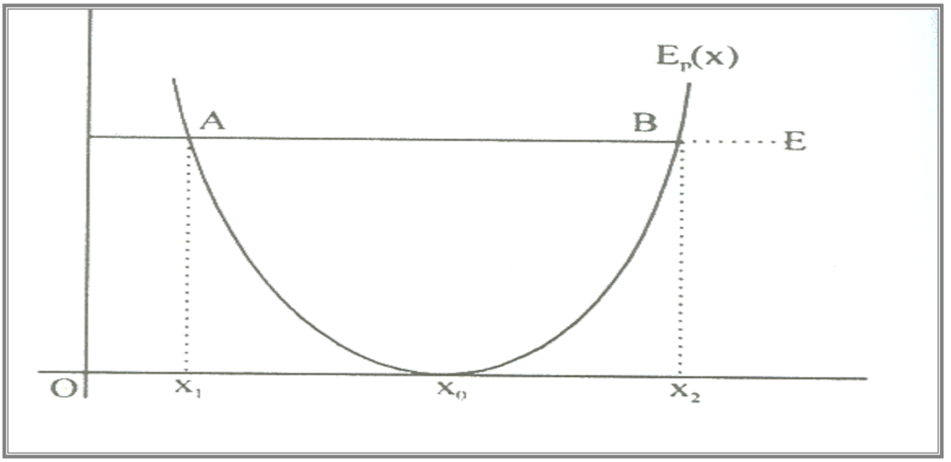
اهتزازات غیر هارمونیکی

تا حال اهتزازات هارمونیکی ســـاده را که توســـط F=-kx با انرژی پوتانشـــیل $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ به‌وجود می‌آمدند، مورد مطالعه قرار دادیم، وقتی‌که x از موقعیت تعادل O اندازه گردد. اگر موقعیت تعادل به عوض مبدأ در x_0 قرار داشته باشد، در آن حالت نظر به شکل (۳) می‌توان نوشت که

$$E_p = \frac{1}{2}k(x-x_0)^2 \quad (13)$$

به‌خاطر باید داشـــت که گراف E_0 یک پارابول با راأس x_0 می‌باشـــد. اگر انرژی مجموعی E انرژی E_p را در نقاط A و B قطع نماید، در آن حالت ذره بین موقعیت‌های x_1 و x_2 اهتزاز می‌نماید. این نقاط نظر به x_0 به‌صـــورت متناظر قرار دارند. چون $\frac{dE_p}{dx} = k(x-x_0)$ می‌باشـــد. پس می‌توان ثابت ارتجاعیت را قرار ذیل تحریر نمود:

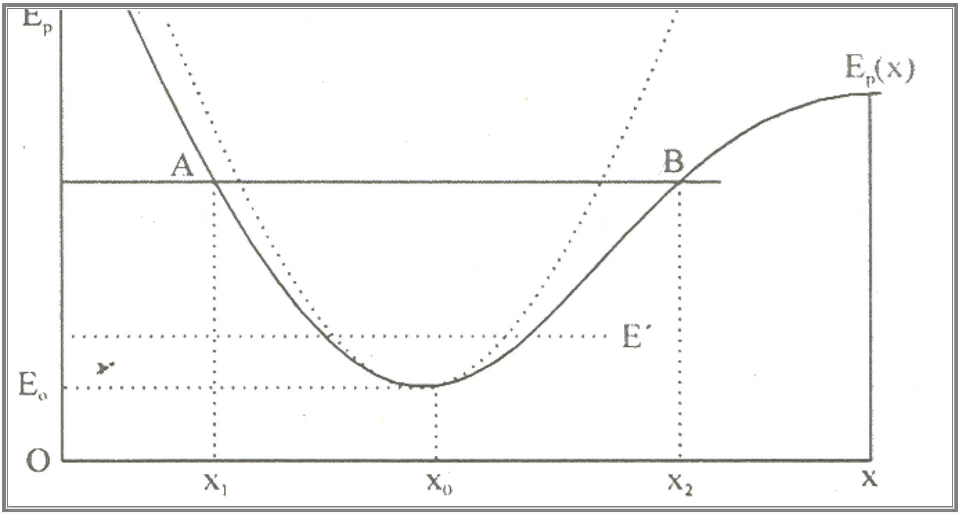
$$k = \frac{d^2 E_p}{dx^2}$$



شکل ۳: گراف انرژی پوتانشیل به تا بع تغییر مکا ن پارابول است

فریکونسی زاویوی قراردیل داده شده است: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

حال حالت را در نظر می‌گیریم که انرژی پوتانشیل به شکل پارابول نبا شد، بلکه به شکل (۴) با شد. این وضعـیت را می‌تـوان از سیـستم‌های فـزیکی دریافـت نمود که عـبارت از نـتایج حـرکت غیرهارمونیکی می‌باشند. اگر انرژی مجموعی E باشد، در آن حـالت ذره بین موقعیـت‌های x_1 و x_2 اهـتزاز خواهد نمود که نظر به موقعیت تعادل x_0 غیرمتناظر اند. در این حالت فریکونسی اهتزاز ات تابع انرژی می‌باشد (۸).



شکل ٤: گراف انرژی پوتانشیل به تابع تغییر مکان پارا بول نیست

می‌خواهیم این فریکونسی را دریافت کنیم. می‌توان قسمت پائین منحنی انرژی پوتانشیل را به منحنی E' پارابول تعویض نمود. خط نقطه نقطه در شکل (۴). دیده می‌شود که به انرژی بسیار کوچک تفاوت بسیار کوچک بین انرژی پوتانشیل واقعی و انرژی پوتانشیل اهتزازکننده‌ی هارمونیکی موجود است. در موقعیت تعادل داریم:

$$k = \left[\frac{d^2 E_p}{dx^2} \right]_{x=x_o}$$

فریکونسی زاویوی اهتزازات به‌حول نقطه‌ی تعادل به‌صورت تقریبی عبارت است از:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\left[\frac{d^2 E_p}{dx^q} \right]_{x=x_o}}{m}} \tag{14}$$

محاسبه‌ی حدود غیر هارمونیک

می‌دانیم که برای تابع داده شده f(x) قضیه تایلور (Taylor) شکل سلسله‌ی طاقت ذیل را دارد:

$$f(x) = f(x_0) + \left(\frac{df}{dx} \right)_0 (x - x_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 f}{dx^2} \right)_0 (x - x_0)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3 f}{dx^3} \right)_0 (x - x_0)^3 + \dots \tag{15}$$

اندکس صفر به این معنی است که مشتق در $x = x_0$ گرفته می‌شود. این قضیه را بالای انرژی پوتانشیل $E_p(x)$ که در شکل (۴) داده شده، تطبیق نموده و به خاطر باید دا شت که در x_0 داریم که $\left[\frac{dE_p}{dx} \right]_0 = 0$ است، زیرا E_p در x_0 اصغری است، پس داریم:

$$\begin{aligned} E_p(x) &= E_p(x_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 E_p}{dx^2} \right)_0 (x - x\ )^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3 E_p}{dx^3} \right)_0 (x - x_0)^3 + \dots \\ &= E_p(x_0) + \frac{1}{2} k (x - x_0)^2 + \frac{1}{6} k' (x - x_0)^3 + \dots. \end{aligned} \tag{16}$$

درحالی‌که $\left[\frac{d^2 E_p}{dx^2} \right] = k$ ، $\left[\frac{d^3 E_p}{dx^3} \right]_0 = k'$ و غیره و ضع گردیده اند. حد اول آن ثابت بوده و مطابقت به تغییرات انرژی پوتانشیل در صفر می‌نماید. حد دوم حد مربع بوده و مطابقت به

اهتزازکننده‌ی هارمونیکی با $\left[\frac{d^2E_p}{dx^2}\right]=k$ می‌نماید. حدود باقی‌مانده به‌نام حدود غیرهارمونیکی یاد می‌گردند. برای آسانی مسأله حدود غیرهارمونیک را قرار ذیل تحریر می‌داریم:

$$E_p(q)=\frac{1}{2}C_2q^2+\frac{1}{6}C_3q^3+\frac{1}{24}C_4q^4+\ldots$$

در حالی‌که $\frac{1}{24}k''=\frac{1}{24}C_4$ ، $\frac{1}{6}k'=\frac{1}{6}C_3$ ، $\frac{1}{2}k=\frac{1}{2}C_2$ ، $q=x-x_0$ وضـع شـده اند. قوه برگرداننده عبارت است از $F=-\frac{dE_p}{dx}$ که قرارذیل دریافت می‌شود (٦).

$$F=-C_2q-\frac{1}{2}C_3q^2-\frac{1}{6}C_4q^3-\ldots \qquad (17)$$

نتیجه‌گیری

حرکت هارمونیکی ساده، انرژی ثابتی است که قوه‌ی عامل محافظوی باشد. درحرکت اهتزازی دیده می‌شود که متمادیا تبدیل انرژی حرکی به انرژی پوتانشیل و برعکس تبدیل انرژی پوتانشیل به حرکی موجود اســت. وقتی‌که ذره از موقعیت تعادل دور میگردد انرژی پوتانشــیل آن تراید نموده و انرژی حرکی آن تنـاقص می‌کنـد. گراف انرژی در حرکـت‌هـای هـارمونیکی پـارابولااســـت. اهتزازات غیرهارمونیکی اهتزازاتی اند که انرژی پوتانشیل به شکل پارابول نمی‌با شد. اگر انرژی مجموعی نظر به موقیعت تعادل غیرمتناظر باشد و هم‌چنان فریکونسی اهتزازات تابع انرژی می‌باشد. در حرکت‌های غیر هارمونیکی انحراف ذیل نسبت به اهتزاز هارمونیکی ساده موجود است:

۱. حرکت نتیجوی ذره به صورت عموم عبارت از انطباق اهتزازات هارمونیکی اساسی با فریکونسی $\omega=\sqrt{\frac{C_2}{m}}$ بوده و حدود هارمونیک بلند دارای فریکونسی‌های 2ω , 3ω ,4ω ,... می‌باشند.

۲. نقطه‌ی تعادل که به‌حول آن اهتزازات صـورت می‌گیرد، به‌صـورت عموم از q=0 به یک موقعیت $q=q_0$ تغییر مکان می‌نماید. در این حالت گفته می شود که ذره به صورت متناظر به‌حول نقطه $q=q_0$ اهتزاز می‌باشد.

منابع

(۱) احدیار، فریبا. فزیک میخانیک. کابل. انتشارات سعید.۱۳۹۲ ، صص ۱۵۹-۱٦٦.

(۲) ستانیزی، عبدالظاهر و احدیار، فریبا. میخانیک کلاسیک. کابل. نشرات بوهنتون کابل. ۱۳۸۷، صص ۲۰۰-۱۸۲.

(۳) ستانیزی، عبدالظاهر و احدیار، فریبا. فزیک عمومی. کابل. نشرات پوهنتون کابل. ۱۳۸۷، صص۱٦۷-۱۹۲.

(4) Nayak, Abhigit. Engineering Physics. Third Edition. Published by S K. Kataria and Sons Delhi India. 2006, pp. 55-78.

(5) Cutnel, John, D. and Jonson, K. W. Physics. Sixth Edition. John Wiley and Sons Inc. 2004, pp. 267-270.

(6) Kleppner, Daniel. And Kolenkow. Robert, An Introduction. 2009, pp. 410-414.

(7) Kakani , S. L. Hemrajani, C. and Kakani, Shubhra, Mechanics, Viva, p Books Private Limited New Delhi , India. 2009, pp. 410-460.

(8) Kakani , S. L. Hemrajani, C. Waves and Osillations New Delhi. 2002, pp. 144-288.