پایـداری غیر ارشـمیدسـی هایرز-اولام مـعادلات دیفـرانسیل خـطی غیرمـتجـانس مرتبـه‌ی دوم

پوهنیار محمدخالد ستوری[19]

تقریظ دهنده: پوهندوی منیژه سرهنگ

مجـله‌ی علمی-تحقیقی حـوزه‌ی علوم طـبیعی پـوهـنتون کـابـل، ۳ (۳) ۱۳۹۹

چکیده

اولین‌بار در سال ۱۹۳۳، آبلوزا پایداری هایرز-اولام معادلات دیفرانسیل خطی را بررسی نمود، پس از آن مقالات بسیاری در این زمینه منتشـر گردیده اسـت که تعدادی از آن‌ها را می‌توان در مراجع (٦، ١٩) ملاحظه نمود. در این مقاله می‌خواهیم پایـداری مـعادله‌ی دیفرانسیل خطی را در فضـای نورم‌دار غیـر ارشمیدسی $\mathbf{R}$ بررسی کنیم. فرض کنیم $(\mathbf{R},|\ |)$ فضـای نورم‌دار غیـر ارشمیدسی اعـداد حـقیقی باشد. معادله دیفرانسیل خـطی نا متـجانس مرتبه دوم با ضـرایب غیر ثابت $y''+f(x)y'+g(x)y=h(x)$ را در نظر می‌گیریم کـه در آن تـوابع داده شـده $f,g,h:(a,b)\subseteq\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ متمادی هستند. در این مقاله پایداری هایرز-اولام این معادله در فضای نورم‌دار غیر ارشمیدسی اعداد حقیقی ثابت می‌کنیم.

اصطلاحات کلیدی: پایداری هایرز-اولام؛ معادلات دیفرانسیل خطی؛ نورم؛ فضای نورم‌دار؛ نورم غیر ارشمیدسی

Non-Archimedean Stability Of Nonhomogeneous Second Order Linear Differential Equations

Jr. Teaching Asstt. Mohammad Khalid Stori

Abstract

For the first time in 1933, Abloza studied the stability of the Hyers-Ulam linear differential equations, since then, many articles have been published in this field, some of which can be seen in references (6-19). In this paper, we want to investigate the stability of a linear differential equation in a non-Archimedean normed space. Let $(\mathbf{R},|\ |)$ be a Non-Archimedean normed space of real numbers. In this Paper, we prove the Hyers-Ulam stability of nonhomogeneous second order Linear differential equations with non-constant coefficients, $y''+f(x)y'+g(x)y=h(x)$ In the non-Archimedean normed space $(\mathbf{R},|\ |)$, where $f,g,h:(a,b)\subseteq\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ are given continues functions.

Keywords: Hyers-Ulam stability; Norm; Normed space; Linear Differential Equations; Non-Archimedean norm

ارجاع

سـتوری، محمد خالد. (۱۳۹۹). پایداری غیرارشـمیدسـی هایرز-اولام معادلات دیفرانسـیل خطی غیرمتجانس مرتبه دوم. مجـله‌ی علمی- تحـقیقی حـوزه‌ی علـوم طبیعی پوهنتـون کـابل، شماره ۳ (۳)، صص ۲۳۵-۲۴۴.

---

[19] استاد پوهنځی ریاضیات، پوهنتون کابل

مقدمه

فرض کنیم $\varepsilon > 0$ دل‌خواه و $y:(a,b) \to \mathbb{R}$ ، تابع دو بار مشتق‌پذیر پیوسته، حل غیر مساوات زیر باشد:

$$\left| y''+ f(x)y'+g(x)y-h(x) \right| \leq \varepsilon \qquad (1)$$

که در آن $f,g,h:(a,b) \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ توابع داده شده و متمادی هستند. اگر برای هر تابع $y:(a,b) \to \mathbf{R}$ که در نا مساوی(۱) صدق می‌کند، تابع $y:(a,b) \to \mathbf{R}$ موجود با شد به گونه‌ی که ابتدا حل برای معادله دیفرانسیل زیر باشد:

$$y''+ f(x)y'+g(x)y = h(x) \qquad (2)$$

و ثانیاً برای هر $x \in (a,b)$ نامساوات زیر صحت داشته باشد:

$$\left| y(x) - y_0(x) \right| \leq k(\varepsilon)$$

که در آن $k(\varepsilon)$ فقط به ε مرتبط است و $\lim_{\varepsilon \to 0} k(\varepsilon) = 0$ آن وقت می‌گوییم معادله دیفرانسیل (۲) دارای پایداری هایرز-اولام است. اگر در این تعریف ε و $k(\varepsilon)$ به ترتیب با توابع منا سبی مانند $\varphi(x)$ و $\phi(x)$ جانشین شوند، آن وقت می‌گوییم این معادله دیفرانسیل دارای پایداری تعمیم‌یافته‌ی هایرز-اولام یا پایداری هایرز-اولام-راسیاس است(۹). برای ملاحظه جزیات بیشتر به مراجع (۱-۳) مراجعه کنید.

اولین‌بار در سال ۱۹۳۳، آبلوزا(۵،۴) پایداری هایرز-اولام معادلات دیفرانسیل خطی را برر سی نمود، پس از آن مقالات بسیاری در این زمینه منتشر گردیده است که تعدادی از آن‌ها را می‌توان در مراجع (۶-۱۹) ملاحظه نمود.

فرض کنیم k یک ساحه باشد، تعریف تابع قیمت مطلق روی ساحه k را یادآوری می‌کنیم. یک تابع قیمت مطلق روی ساحه k تابع است به صورت $|\cdot|:\mathrm{k} \to [0,+\infty)$ که ابتدا صفر در ساحه k تنها عضوی است که قیمت مطلق آن برابر با صفر است، ثانیاً $|ab| = |a||b|$ برای تمام اعضای a و b در ساحه k موجود باشد و ثالثاً غیر تساوی مثلثی برقرار باشد، یعنی $|a+b| \leq |a| + |b|$ برای تمام اعضای a و b در ساحه k موجود و صحت داشته باشد. ساحه‌ی k مجهز به یک قیمت مطلق را یک ساحه‌ی قیمت مطلق می‌نامیم. سیت اعداد حقیقی با قیمت مطلق معمولی وسیت اعداد مختلط با قیمت مطلق مختلط مثال‌های معروف از ساحه‌های قیمت مطلق می‌باشند.

اگر در تعریف قیمت مطلق شرط نامساوی مثلثی را با شرط $|a+b| \le \max\{|a|+|b|\}$ که آن را نامساوی مثلثی قوی می‌نامیم، جانشین نماییم، تابع قیمت مطلق را یک قیمت مطلق غیر ارشمیدسی و ساحه‌ی مجهز به چنین قیمت مطلق را یک ساحه‌ی غیر ارشمیدسی می‌نامیم. واضح است که هر ساحه‌ی غیر ارشمیدسی یک ساحه‌ی ارشمیدسی است ولی عکس آن در حالت کلی صدق نمی‌کند، مثلاً در ساحه‌ی اعداد ساحه‌ی اعداد حقیقی $\mathbf{R}$ با قیمت مطلق معمولی اگر قرار دهیم $a=b=1$ ، آن وقت نامساوی مثلثی قوی صدق نمی‌کند، بنابراین، ساحه‌ی قیمت مطلق $\mathbf{R}$ با قیمت مطلق معمولی یک ساحه‌ی غیر ارشمیدسی نیست. تابع قیمت مطلق گسسته روی ساحه‌ی دل‌خواه k را به این شکل تعریف می‌کنیم که قیمت مطلق تمام اعضای k برابر با یک باشد به جز صفر ساحه و قیمت مطلق صفر ساحه نیز برابر با صفر باشد. قیمت مطلق را مثال واضح برای ساحه یغیر ارشمیدسی k می‌نامیم. می‌توان ثابت نمود که روی یک ساحه‌ی متناهی k تنها تابع قیمت مطلق غیر ارشمیدسی قابل تعریف، همان تابع قیمت مطلق اشکارا است.

اولین بار هنشل (۱۸) مفهوم ساحه‌ی غیر ارشمیدسی را ارایه نمود. هم‌چنین مثال مهم ساحه‌ی غیر ارشمیدسی p -آدیک را هنشل ارایه نمود. برای آشنایی با فضای غیر ارشمیدسی اعداد p -آدیک (۱۷).

فرض کنیم E یک ساحه وکتوری روی یک ساحه غیر ارشمیدسی k با قیمت مطلق غیر واضح $|\ |$ باشد. تابع $\|\ \|: E \to [0,+\infty)$ را یک نورم غیر ارشمیدسی می‌گوییم هرگاه ابتدا صفر فضای وکتوری E تنها عضوی باشد که نورم اش برابر با صفر است، ثانیاً برای تمام اعضای a در فضای وکتوری E وتمام اعضای r در ساحه k و ثالثاً نامساوی مثلثی قوی برقرار باشد، $\|a+b\| \le \max\{\|a\|,\|b\|\}$ برای تمام اعضای a و b در فضای وکتوری E صحت داشته باشد. فضای وکتوری E مجهز به یک نورم غیر ارشمیدسی $\|\ \|$ را یک فضای نورم‌دار غیر ارشمیدسی می‌نامیم. از جمله ویژگی‌های فضاهای نام‌دار غیر ارشمیدسی این است که ردیف $\{a_n\}$ در فضای نام دار غیر ارشمیدسی E کوشی است هرگاه ردیف $\{a_{n+1}-a_n\}$ در E متقارب به صفر باشد، زیرا برای $n>m$ داریم:

$$\|a_n - a_m\| \le \max\{\|a_{j+1} - a_j\| : m \le j \le n-1\}$$

فضای نورم دارغیر ارشمیدسی E را کامل (بانخ) نامیم هرگاه هر ترادف کوشی در آن متقارب باشد. برای آشنایی بیشتر با فضاهای نورم دارغیر ارشمید سی و مفاهیم متمادیت و مشتق پذیری توابع در فضاهای نورم دار غیر ارشمیدسی. (۱۳، ۱۵)

در این مقاله می‌خواهیم پایداری معادله دیفرانسیل خطی(۲) را در فضای نورم دار غیر ارشمیدسی $\mathbf{R}$ بررسی کنیم (۱۳). معادلات دیفرانسیل معمولی انواع و اقسام مختلف دارد، یک بحث وسیع ریاضیات تطبیقی را تشکیل داده است. در این مقاله پایداری غیر ارشمید سی هایرز-اولام معادلات دیفرانسیل خطی نا متجانس مرتبه‌ی دوم توضیح و مورد بحث قرار داده شده است.

هدف این مقاله تطبیقی، از نظر تحلیل موضوع ترکیبی و از نظر ماهیت روش توصیفی بوده و روش جمع‌آوری اطلاعات در این مقاله کتاب‌خانه‌ای می‌باشد.

پیشینه‌ی تحقیق

قبل از این که در باره‌ی پایداری معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم غیر متجانس با ضرایب متحول بحث کنیم، لازم است ابتدا آن‌ها را معرفی نماییم.

تعریف: شکل عمومی معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم غیر متجانس با ضرایب متحول $y''+f(x)y'+g(x)y=h(x)$ بوده که در آن $f(x)$ ، $g(x)$ را ضرایب می‌نامند. حل عمومی معادله‌ی ذکر شده دارای دو جواب به ترتیب $y_h(x)$ و $y_p(x)$ است. که $y_h(x)$ حل عمومی معادله‌ی متجانس $y''+f(x)y'+g(x)y=0$ است و $y_p(x)$ یک حل ساده بدون پارامتر معادله‌ی فوق می‌باشد. یعنی حل عمومی معادله‌ی متذکره به صورت $y(x)=y_h(x)+y_p(x)$ است.

پایداری غیر ارشمیدسی معادله دیفرانسیل

لیمه‌ی زیر را در اثبات پایداری معادله (۲) استفاده خواهیم کرد.

لیمه۱. فرض کنیم معادله متجانس متناظربا معادله(۲)، یعنی

$$y''+f(x)y'+g(x)y=0 \tag{3}$$

دارای حل عمومی $y_h:(a,b)\to\mathbf{R}$ به صورت $y_h(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ باشد که در آن c_1 و c_2 ثابت‌های حقیقی اختیاری هستند. در این صورت معادله‌ی دیفرانسیل خطی غیر متجانس (۲) یک حل عمومی $y:(a,b)\to\mathbf{R}$ به صورت

$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)-y_1(x)\int_{a_1}^{x}\frac{y_2(t)r(t)}{W(y_1,y_2)(t)}dt+y_2(x)\int_{a_2}^{x}\frac{y_1(t)r(t)}{W(y_1,y_2)(t)}dt$ را دارد

که در آن a_1 و a_2 نقاط اختیاری از انـــتروال (a,b) و W رونسکین y_1 و y_2 با رابـــطه $W(y_1,y_2)(t)=y_1(x)y'_2(x)-y_2(x)y'_1(x)$ است (۱۴).

اکنون نتیجه‌ی اصلی مقاله را ارایه می‌کنیم. در قضیه‌ی زیر پایداری معادله‌ی دیفرانسیل خطی (۲) را در فضـای نورم‌دار غیر ارشـمیدسـی $\mathbf{R}$ ثابت می‌کنیم. در این بخش باید توجه داشـته باشـیم که تابع قیمت مطلق روی $\mathbf{R}$ غیر ارشمیدسی است و باقیمت مطلق معمولی متفاوت می‌باشد (۵).

قضـیه ۱. فرض کنیم $(\mathbf{R},|\ |)$ یک فضـای نورم‌دار غیرارشـمیدسـی روی سـاحه‌ی غیر ارشـمیدسـی $(\mathbf{R},|\ |)$ باشـد و $f,g,h:(a,b)\subseteq\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ توابع داده شـده و متمادی هســتند و معـادلـه‌ی دیفرانســیـل متجـانس(۳) دارای حـل عمومی $y_h:(a,b)\to\mathbf{R}$ بـه صـــورت $y_h(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ با شد که در آن c_1 و c_2 ثوابت اختیاری حقیقی هستند. اگر تابع دو بار مشـــتق‌پذیر و متمادی $y:(a,b)\to\mathbf{R}$ در نامســـاوی(۱) صـــدق کند، در آن صـــورت تابع $y_0:(a,b)\to\mathbf{R}$ موجود است. طوری که ابتدا حل برای معادله دیفرانسیل(۲) است و ثانیاً برای هر $x\in(a,b)$ نامســـاوی $|y(x)-y_0(x)|\le|\varepsilon|\max\left\{|y_1(x)|\int_{a_1}^{x}\left|\frac{y_2(t)}{W(y_1,y_2)(t)}\right|dt,|y_2(x)|\int_{a_2}^{x}\left|\frac{y_1(t)}{W(y_1,y_2)(t)}\right|dt\right\}$ صدق می‌کند که در آن a_1 و a_2 نقاط اختیاری از انتروال (a,b) هستند.

اثبات: تابع متمادی $r:(a,b)\to\mathbf{R}$ را با رابطه

$$r(x):=y''+f(x)y'+g(x)y \qquad (4)$$

تعریف می‌کنیم. طبق نامساوی(۱) برای $x\in(a,b)$ داریم:

$$|r(x)-h(x)|\le\varepsilon \qquad (5)$$

بنابر لیمه(۱) و رابطه‌ی (۴) ثوابت حقیقی α_1 و α_2 موجود هســتند طوری که برای نقاط a_1 و a_2 اختیاری از انتروال (a,b) داریم:

$$y(x)=\alpha_1y_1(x)+\alpha_2y_2(x)-y_1(x)\int_{a_1}^{x}\frac{y_2(t)r(t)}{W(y_1,y_2)(t)}dt \qquad (6)$$
$$+y_2(x)\int_{a_2}^{x}\frac{y_1(t)r(t)}{W(y_1,y_2)(t)}dt$$

که درآن برای هر $t \in (a,b)$ ، $W(y_1,y_2)(t) \neq 0$ زیرا y_1 و y_2 خطاً مستقل هستند حال تابع $y_0:(a,b) \to \mathbf{R}$ را با رابطه

$$y_0(x) := \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) - y_1(x)\int_{a_1}^{x} \frac{y_2(t)h(t)}{W(y_1,y_2)(t)}dt + y_2(x)\int_{a_2}^{x} \frac{y_1(t)h(t)}{W(y_1,y_2)(t)}dt \tag{7}$$

تعریف می‌کنیم. بنابر لیمه۱ واضح است که y_0 حل برای معادله‌ی دیفرانسیل(۲) است. هم‌چنین از روابط (۵)، (٦) و (۷) رابطه زیر

$$\begin{aligned}\left|y(x) - y_0(x)\right| &= \left|y_1(x)\int_{a_1}^{x} \frac{y_2(t)}{W(y_1,y_2)(t)}(h(t)-r(t))dt + y_2(x)\int_{a_2}^{x} \frac{y_1(t)}{W(y_1,y_2)(t)}(h(t)-r(t))dt\right| \\ &\leq |\varepsilon| \max\left\{|y_1(x)|\int_{a_1}^{x}\left|\frac{y_2(t)}{W(y_1,y_2)(t)}\right|dt, |y_2(x)|\int_{a_2}^{x}\left|\frac{y_1(t)}{W(y_1,y_2)(t)}\right|dt\right\}\end{aligned} \tag{8}$$

نتیجه می‌گردد. با توجه به این‌که برای هر $t \in (a,b)$ ، توابع y_1 و y_2 دو بار مشتق‌پذیر، متمادی و $W(y_1,y_2)(t) \neq 0$ ، پس عبارت ضریب ε در طرف راست رابطه (۸) متناهی است. بنابراین، پایداری معادله (۲) صحت دارد و اثبات تمام است (۷).

اکنون معادله‌ی کوشی (کوشی-اویلر) را درنظر می‌گیریم:

$$x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = h(x) \tag{9}$$

که در آن α و β ثوابت حقیقی هستند و تابع داده شده $h:(0,\infty) \to \mathbf{R}$ مشتق‌پذیر است. در ادامه با استفاده از قضیه(۱) پایداری هایرز-اولام معادله‌ی دیفرانسیل کوشی را ثابت می‌کنیم که حالت خاص از معادله‌ی دیفرانسیل خطی (۲) است. پایداری این معادله را برای حالت خاص ثابت می‌کنیم. در سایر حالات اثبات مشابه است.

قضیه ۲. فرض کنیم $(\mathbf{R},|\ |)$ یک فضای نورم‌دار غیر ارشمیدسی روی ساحه‌ی غیر ارشمیدسی $(\mathbf{R},|\ |)$ باشد و تابع داده شده $h:(0,\infty)\rightarrow\mathbf{R}$ مشتق‌پذیر باشد. هم‌چنین اعداد ثابت حقیقی α و β طور به باشد که رابطه‌ی زیر

$$(\alpha-1)^2-4\beta>0 \tag{10}$$

صدق کند. درآن صورت معادله‌ی دیفرانسیل(۹) دارای پایداری غیر ارشمیدسی هایرز-اولام است.

اثبات: در اصل باید ثابت کنیم که اگر برای تابع دوبار مشتق‌پذیر و متمادی $h:(0,\infty)\rightarrow\mathbf{R}$ نامساوی

$$\left|x^2y''(x)+\alpha xy'(x)+\beta y(x)-h(x)\right|\leq\varepsilon \tag{11}$$

صدق کند، در آن صورت تابع $y_0:(0,\infty)\rightarrow\mathbf{R}$ موجود است طوری‌که ابتدا حل برای معادله‌ی دیفرانسیل(۹) است و ثانیاً برای هر $x\in(0,\infty)$ نامساوی

$$\left|y(x)-y_0(x)\right|\leq k(\varepsilon)$$

صحت دارد که در آن $k(\varepsilon)$ فقط به ε وابسته است و $\lim\limits_{\varepsilon\to0}k(\varepsilon)=0$. فرض کنیم c یک ثابت حقیقی مثبت اختیاری است. ابتدا معادله‌ی دیفرانسیل (۹) را با تعویض $\ln x=t$ و $z(t):=y(e^t)$ به یک معادله‌ی دیفرانسیل با ضرایب ثابت به شکل زیر

$$z''(t)+(\alpha-1)z'(t)+\beta z(t)=h(e^t) \tag{12}$$

تبدیل می‌کنیم. در اصل برای استنتاج معادله (۱۰) باید روابط زیر را در معادله (۹) وضع کنیم:

$$xy'=x\frac{dy(x)}{dx}=x\frac{dy(e^t)}{dt}\frac{dt}{dx}=z'(t)$$
$$x^2y''=x^2\frac{dy'(x)}{dx}=x^2\frac{dy(e^{-t}z'(t))}{dt}\frac{dt}{dx}=z''(t)-z'(t)$$

با توجه به فرض(۱۰) معادله‌ی مشخصه‌ی معادله‌ی دیفرانسیل متجانس وابسته به معادله‌ی دیفرانسیل متجانس وابسته به معادله‌ی دیفرانسیل(۱۲) دارای دو جذر متمایز r_1 و r_2 و حل عمومی به صورت $z_h(t)=c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t}$ است که در آن c_1 و c_2 ثوابت حقیقی می‌با شند. با اعمال تعویض اخیر در نامساوی (۱۰) نتیجه می‌شود:

$$\left|z''(t)+(\alpha-1)z'(t)+\beta z(t)-h(e^t)\right|\leq\varepsilon \tag{13}$$

با در نظر گرفتن $z(t)$ ، $(\alpha-1)$ ، β ، $h(e^t)$ و $\ln c$ در رابطه (۷) به ترتیب به جای $y(x)$ ، $f(x)$ ، $g(x)$ ، $h(x)$ و a در قضـــیه (۲)، نتیجه می‌گیریم که ثوابت حقیقی c_1 و c_2 طور موجود هستند که روابط زیر

$$z_0(t)=c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t}-\frac{e^{r_1t}}{r_2-r_1}\int_{\ln c}^{t}e^{-r_1\mu}h(e^{\mu})d\mu+\frac{e^{r_1t}}{r_2-r_1}\int_{\ln c}^{t}e^{-r_2\mu}h(e^{\mu})d\mu$$

و

$$|z(t)-z_0(t)|\le\frac{|\varepsilon|}{|r_2-r_1|}\max\left\{\int_{\ln c}^{t}\left|e^{r_1(t-\mu)}\right|d\mu,\int_{\ln c}^{t}\left|e^{r_2(t-\mu)}\right|d\mu\right\}$$

صحت دارند. اکنون با عمل معکوس تعویض، یعنی $x=e^t$ و $z(t)=y(x)$ به روابط

$$y_0(x)=c_1x^{r_1}+c_2x^{r_2}-\frac{x^{r_1}}{r_2-r_1}\int_{c}^{x}\lambda^{-r_1-1}h(\lambda)d\lambda+\frac{x^{r_2}}{r_2-r_1}\int_{c}^{x}\lambda^{-r_2-1}h(\lambda)d\lambda$$

و

$$|y(x)-y_0(x)|\le\frac{|\varepsilon|}{|r_2-r_1|}\max\left\{\left|\int_{c}^{x}\lambda^{-r_1-1}x^{r_1}d\lambda\right|,\left|\int_{c}^{x}\lambda^{-r_2-1}x^{r_2}d\lambda\right|\right\}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{|\varepsilon|}{|r_2-r_1|}\max\left\{\left|\dfrac{1-(\frac{x}{c})^{r_1}}{r_1}\right|,\left|\dfrac{1-(\frac{x}{c})^{r_2}}{r_2}\right|\right\} & if\ \ r_1\neq0\ \ and\ \ r_2\neq0\\[2ex] \dfrac{|\varepsilon|}{|r_2|}\max\left\{\left|\ln(\dfrac{x}{c})\right|,\left|\dfrac{1-(\frac{x}{c})^{r_2}}{r_2}\right|\right\} & if\ \ r_1=0\ \ and\ \ r_2\neq0\\[2ex] \dfrac{|\varepsilon|}{|r_1|}\max\left\{\left|\ln(\dfrac{x}{c})\right|,\left|\dfrac{1-(\frac{x}{c})^{r_1}}{r_1}\right|\right\} & if\ \ r_2=0\ \ and\ \ r_1\neq0\end{cases}$$

دست می‌یابیم. بنابراین، معادله‌ی دیفرانسیل (۱۱) دارای پایداری غیر ارشمیدسی هایرز-اولام است و اثبات کامل می‌گردد (۱۷، ۱۹).

نتیجه‌گیری

با در ظر داشت پیشینه‌ی موضوع و طرح موضوع معادلات دیفرانسیل معمولی یک مبحث وسیع بوده و به اصناف مختلف تقسیمات شده اند، برای حل دقیق آن‌ها روش‌های مختلف و گوناگون پیشنهاد گردیده اند. از این‌که حل دقیق همه معادلات دیفرانسیل معمولی ناممکن بوده ناچار هستیم به حل عددی آن‌ها مراجه گردد، در حل عددی (تقریبی) معادلات دیفرانسیل دو موضوع بسیار مهم و اساسی است که عبارت اند از پایداری و ناپایداری حل تقریبی، روش حل عددی (تقریبی) معادلات دیفرانسیل است که پایداری و ناپایداری یک معادله‌ی دیفرانسیل توسط نورم های متفاوت بررسی و مطالعه می‌گردد. درین مقاله برای بررسی پایداری معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم معمولی با ضرایب ثابت یا متحول از نورم غیر ارشمیدسی استفاده گردیده است.

ازپایداری غیر ارشمیدسی هایرز-اولام معادلات دیفرانسیل خطی غیر متجانس مرتبه‌ی دوم چنین نتیجه به‌دست می آید که:

- فرض کنیم k یک ساحه باشد، تعریف تابع قیمت مطلق روی ساحه k را یادآوری می‌کنیم. یک تابع قیمت مطلق روی ساحه‌ی k تابع است به صورت $|\;|:k \to [0,+\infty)$ که ابتدا صفر در ساحه‌ی k تنها عضوی است که قیمت مطلق آن برابر با صفر است، ثانیاً $|ab| = |a||b|$ برای تمام اعضای a و b در ساحه‌ی k موجود باشد و ثالثاً نامساوی مثلثی صدق کند، یعنی $|a+b| \le |a| + |b|$ برای تمام اعضای a و b در ساحه‌ی k موجود و صحت داشته باشد. ساحه‌ی k مجهز به یک قیمت مطلق را یک ساحه‌ی قیمت مطلق می‌نامیم. سیت اعداد حقیقی با قیمت مطلق معمولی وسیت اعداد مختلط با قیمت مطلق مختلط مثال‌های معروف از ساحه‌های قیمت مطلق می‌باشند.
- معادله دیفرانسیل خطی غیرمتجانس مرتبه‌ی دوم با ضرایب غیر ثابت $y''+f(x)y'+g(x)y=h(x)$ معادله‌ی است که در فضای نورم‌دار غیر ارشمیدسی اعداد پایدار است.

منابع

(1) Czerwik, S. Functional Equations and Inequalities in several variables, World scientific, Singapore. 2002.

(2) Hyers, D.H., Isac, G. and Rassias, T.M. stability of Functional Equation in Several Variables, Birkhauser, boston. 1998.

(3) Sahoo. P. K and kannappan, P. Introduction to Functional Equations, CRC press, boca Raton. 2011.

(4) Obloza, M. Hyers stability of the linear differential equations, Rocz. nauk.-Dydakt. Pr. Mat. 1993; .13, pp. 259-270.

(5) Obloza, M. connection between Hyers and Lyapunov stability of the ordinary differential equation, Rocz. nauk. -Dyadakt. Pr. Mat. 1997; 14, pp. 141-146.

(6) Alsina, C and Ger, R. On some inequalities and stability results related to the exponential function, J.inequal. Appl 1998; 2, pp. 373-380.

(7) Gavruta, P, Jung, S-M. and Li, Y. Hyers-Ulem stability for second- order linear differential equation with Electronic. J. Differ. Equ 2011; pp. 801-805.

(8) jung, S-M. Hyers –Ulam stability of linear differential equation of first order, Appl. Math. 2004; 17, pp. 1135-1140.

(9) Jung, S-M. Hyers –Ulam stability of linear differential equation of first order, II, Appl. Math. Lett. 2006; 19, pp. 854-140.

(10) Jung, S-M. Hyers. Ulam stability of a system of first order linear differential equation with constant coefficients, J. Math. Anal. Apple. 2006; 320, pp. 549-561.

(11) Miura, T.,Oka ,H,.Talahasi, S-E.and Niwa , N. Hyers –Ulam stability of first order linear differential equation for banach space-valued holomorphic mappings, J. Math. in equal. 2007; 3, pp. 377-385.

(12) popa, D. Rasa, I. On the Hyers-Ulam of the linear differential equation, J. Math. Anal. Appl. 2011; 381, pp. 530 537.

(13) popa, D. Rasa, I. On the Hyers-Ulam of the linear differential operator with non-constant coefficient, Appl. Math. Compute. 2011; 219, pp. 1562-1568.

(14) Rus, I, A. Ulam stability of ordinary differential equation, stud. Univ. Babes-Bolyai, Math. 2009; 54, pp. 125-134.

(15) Wang, G.,Zhou, M .and Sun , L. Hyers-Ulam stability of differential. equation of first order, Appl, Math. Lett. 2008; 21, pp. 1024-1028.

(16) Alqifary, Q.H. and Jung, S-M. On the hyers –Ulam stability of differential equation of second order, Abstr. Appl. Anal., Article ID 483707. 2014.

(17) Cimpean, D.S. and popa, On the stability of the linear differential equation of higher order with constant coefficient, Appl. Math. Compute. 2010; 217, pp. 4141-4146.

(18) Ghamei, M.B., Gordji, M.E., Alizadeh and B, Park, C. Hyers-Ulam stability of exact second –order linear differential equation, Adv. Differ. Equ., Article ID 36. 2012.

(19) Li, Y. and shen, Y. Hyers -Ulam stability of linear differential. equation of second order, Appl. Math. 2010; 23, pp. 306-309.