نقش واریانس در امید ریاضی

پوهنیار عزیزالله پاینده[۱۴]

تقریظ‌دهنده: پوهاند خالقداد فیروزکوهی

مجـله‌ی علمی-تحقیقی حـوزه‌ی علوم
طـبیعی پـوهنتــون کــابـل، ۲ (۳) ۱۳۹۹

چکیده

اگر امید ریاضــی را نوع خوش‌بینی در بازی‌های چانســی در نظر بگیریم، در این صــورت می‌توان گفت که واریانس در حقیقت از ریسک که در بازی چانسی مورد نظر نهفته است ما را آگاه می‌کند. با دانستن امید ریاضی و واریانس و اعمال آن می توان به این مهم پی‌برد و تصمیم بهتر و سنجیده شده‌ی گرفت. ایده اصلی مطرح شده در مورد امید ریاضی توسط «بلز پاسکال» (Blaise Pascal) دانشمند و ریاضی‌دان فرانسوی در سال ۱۶۵۴ میلادی مطرح شد. او می‌خواست متوسط درآمد شخصی که در چنین بازی شرکت می‌کند را محاسبه کرده و مشخص کند در حالتی که شخص در تعداد زیادی از این بازی شرکت کند آیا سود نصیبش خواهد شد و یا زیان.

اصطلاحات کلیدی: کمیت مورد انتظار؛ بازی چانس؛ واریانس؛ امید ریاضی؛ اوسط؛ متحول تصادفی و انحراف معیار

Role of Variance on Mathematical Expectation

Jr. Teaching Asstt. Azizullah Paeyndah

Abstract

The concept of mathematical expectation arose in connection with games of chance. In its simplest form, mathematical expectation is the product of the amount a player stands to win and the probability that the player would win. The idea of the expected value originated in the middle of the 17th century from the study of the so-called problem of points, which seeks to divide the stakes in a fair way between two players. This problem had been debated for centuries, and many conflicting proposals and solutions had been suggested over the years, when it was posed in 1654 to Blaise Pascal by French writer and amateur mathematician Chevalier de Méré. Méré claimed that this problem couldn't be solved, and that it showed just how flawed mathematics was when it came to its application to the real world.

Keywords: Mathematical expectation; chance; player; variance; problem; Pascal; standard division

ارجاع

پاینـده، عزیزالله. (۱۳۹۹). نقـش واریانـس در امیـد ریاضی. مجـله‌ی علمی- تحـقیقی حـوزه‌ی علـوم طـبیعی پوهنتـون کـابل، شماره ۲ (۳)، صص ۱۴۹ – ۱۵۸.

---

[۱۴] استاد پوهنځی علوم وترنری، پوهنتون کابل

مقدمه

امید ریاضی در حقیقت ادامه یک جریان را مشخص می‌کند و از این که بازی را ادامه می‌دهیم، آیا در نهایت سود نصیب ما خواهد شد یا ضرر. این سنجش با استفاده از امید ریاضی صورت می‌گیرد.

در نظریه‌ی احتمالات، امید ریاضی مقدارِ قابل انتظاری است از یک متحول تصادفی گسسته که عبارت است از مجموع حاصل‌ضرب احتمالِ وقوع هر یک از حالات ممکن در مقدار آن حالت. در نتیجه اوسط مساوی است به مقداری که به‌طور متوسط از یک فرایند تصادفی با بی‌نهایت تکرار انتظار می‌رود. به بیان ساده‌تر، مقدار چشم داشتی از یک متحول تصادفی، مقدارِ تعداد اوسط دفعاتِ مشاهده شده‌ی یک وضعیت است. به عنوان مثال، در پرتاب یک سکه، برای به دست آوردن احتمال مشاهده هر سمت از یک سکه (شیر یا خط)، می‌توان این کار را به دفعات زیاد انجام داد. اکنون اوسط تعداد دفعاتِ مشاهده هرکدام از حالت‌ها (شیر یا خط)، مساوی است به مقدار چشم داشتی یا همان امید ریاضی (۲).

اگر تاس n بار پرتاب شود و اوسط نتایج محاسبه شوند، پس با افزایش n، اوسط به مقدار مورد انتظار متقارب خواهد بود. به این موضوع قانون قوی اعداد بزرگ می‌گویند.

امید ریاضی کمیت است که ممکن در عمل واقع نشود اما ادامه‌ی یک جریان را مشخص می‌کند، مثلاً احتمال ظاهر شدن هر یک از وجوه در پرتاب تاس یک بحث است اما هدف متوقعه یعنی این که چه انتظار می‌رود که واقع شود، بحث دیگری است و این موضوع مهم‌تر است. و یا این که اگر شخصی به صورت دوام‌دار به یک بازی ادامه می‌دهد، ادامه‌ی این بازی به نفع شخص است یا به ضرر وی. این موضوعاتی می‌باشند که امید ریاضی روی آن بحث می‌کند. لاپلاس مشهور به نیوتن فرانسه گفته است: علم احتمال که برای تشخیص میزان برد و یا باخت در بازی‌های چانسی مطرح شده ممکن است درآینده به مهم‌ترین هدف از دانش بشری تبدیل شود (۴).

پیشینه‌ی موضوع

متحول تصادفی: متحول تصادفی توصیف عددی برآمد یک آزمایش است؛ به عبارت دیگر، متحول تصادفی تابعی از فضای نمونه به اعداد حقیقی است (٦).

و یا این‌که متحول تصادفی قانونی است که به وسیله‌ی آن به نقطه‌ای از فضای نمونه یک عدد حقیقی نسبت داده می‌شود. متحولین تصادفی معمولاً با حروف بزرگ مانند X و Y نمایش داده می‌شود.

متحولین تصادفی معمولاً قیمت‌های حقیقی را می‌گیرند؛ ولی می‌توان انواع دل‌خواهی مانند مقدارهای بولی، اعداد مختلط، متریکس‌ها وغیره را در نظر گرفت. متحول تصادفی بر دو نوع است: متحول تصادفی گسسته و متحول تصادفی پیوسته (۹).

متحول تصادفی X را گسسته گویند، هرگاه تعداد مقادیری که می‌تواند اختیار کند متناهی یا نامتناهی شمارش‌پذیر باشد (۸).

متحول تصادفی X را پیوسته گویند، هرگاه مقادیری که می‌تواند اختیار کند از یک ست نامتناهی (زمان، مکان و ...) باشد؛ به عبارت دیگر مقادیر متحول تصادفی پیوسته X در یک فاصله یا انتروال از ست اعداد حقیقی قرار دارد (۷).

نتایج برخی از آزمایش‌های تجربی تصادفی کمی هستند و در نتیجه فضای نمونه‌ی آن را اعداد حقیقی تشکیل می‌دهند. به عنوان مثال اگر آزمایش تجربی تصادفی انتخاب یک محصل به تصادف از محصلان کلاس و مشاهده وزن وی باشد، برآمدهای این آزمایش تجربی تصادفی کمی خواهد بود. در مواردی ممکن است برآمدهای یک آزمایش تجربی تصادفی دارای طبیعت کمی نباشند، اما بتوان به سادگی کمیت‌هایی را به آن نسبت داد. آزمایش تجربی تصادفی دارای پرتاب یک تاس از این نوع است؛ زیرا به سادگی می‌توان اعداد ۱ تا ٦ را به شکل‌های مختلف بر روی تاس نسبت داد. گاهی نیز برآمدهای یک آزمایش تجربی تصادفی دارای رابطه واضح و مشخصی با اعداد حقیقی نیستند. به عنوان مثال در پرتاب یک سکه، آمدن شیر یا خط نشان‌دهنده‌ی هیچ کمیت مشخصی نیست و در نتیجه می‌توان هر عدد دل‌خواهی را به شیر یا خط نسبت داد (۹).

در اصطلاح ریاضی به قانونی که اعداد حقیقی خاصی را به هر یک از برآمدهای یک آزمایش تجربی تصادفی نسبت می‌دهد، تابع می‌گویند؛ اما در اصطلاح احتمال به این تابع متحول تصادفی گفته می‌شود. حال آن‌که متحول تصادفی مانند متحول‌های معمول‌الجبری نبوده و یک تابع است و باید خصوصیات یک تابع را براساس مبانی ریاضی دارا باشد.

تابع احتمال: به تابعی که بتوان با استفاده از آن احتمال هر یک از مقادیر ممکن متحول تصادفی را مشخص کرد، تابع احتمال یا توزیع احتمال گفته می شود. در مورد متحول‌های گسسته و پیوسته تابع احتمال به‌طور متفاوت تعریف می‌شود (۵).

مقـدار مورد انتـظار گسسته: اگر متحـول تصادفی گسـسته X بتواند مقدار x_1 را با احتمال p_1، مقدار x_2 را با احـــتمال p_2 و غیره تا مقدار x_k را با احتمال p_k اخـــتیار کند، پس امـــید ریاضی به صورت زیر تعـریف می‌شـود:

$$E[x] = x_1p_1 + x_2\, p_2 + \ldots + x_k\, p_k = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i \quad (۱)$$

می‌دانیم که $p_1 + \ p_2 + \ldots + \ p_k = 1$، پس می‌توان امید ریاضـــی را به شـــکل اوســـط وزنی به‌شکل زیر نوشت؛ یعنی:

$$E[x] = \frac{x_1p_1 + x_2\, p_2 + \ldots + x_k\, p_k}{p_1 + \ p_2 + \ldots + \ p_k} \quad (۲)$$

اگر مقادیر x_i هم‌چانس باشـند، یعنی $p_1 = p_2 = p_3 = \ldots = p_k$، پس اوسـط وزنی به اوسـط ساده تبدیل می‌گردد (۳).

امید ریاضـی را مقدار مورد انتظار نیز می‌گویند. به عنوان مثال از امید ریاضـی فرض می‌کنیم به یک شرکت‌کننده در مسابقه نمایشی دو سؤال ۱ و ۲ داده می‌شود و او می‌تواند با انتخاب خود به ترتیبی که می‌خواهد آن دو را پاسخ گوید (۲). اگر او تصمیم بگیرد که سؤال i $(i = ۱، ۲)$ را اول پاسخ گوید، آن‌گاه او در صورتی می‌تواند سؤال j $(j \neq i)$ را پا سخ گوید که پا سخ سؤال i صحیح با شد. اگر پاسخ سؤال اولیه او صحیح نباشد مجاز نیست که به سؤال دیگر پاسخ بدهد. شرکت کننده جایزه‌ای به اندازه v_i دریافت کند، در صـورتی که سـؤال i $(i = 1.2)$ را پاسـخ صـحیح بدهد. بنابراین برای مثال، او جایزه $v_۱ + v_۲$ را زمانی دریافت می‌کند که به هر دو سؤال پاسخ صحیح بدهد. اگر احتمال این که او i را بداند مساوی به P_i $(i = 1.2)$ با شد. کدام یک از سوال ها را ابتدا انتخاب نماید، تا امید ریاضی جایزه او حد اکثر شود؟ فرض کنید که حادثه های E_i $(i = 1.2)$ که نشان‌دهنده‌ی این که او پاسخ صحیح سؤال i را بداند مستقل باشند (۱).

برای حل، اگر او ابتدا سؤال اول را انتخاب کند آن‌گاه جایزه‌ی اول مساوی است به:

0 ،با احتمال $1 - P_1$

v_1 ،با احتمال $P_1(1 - P_2)$

$v_1 + v_2$ ،با احتمال $P_1\, P_2$

بنابراین، امید ریاضی میزان جایزه‌ی او مساوی است به:

$$E[x] = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) \qquad (3)$$

می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} E[x] &= 0(1 - P_1) + v_1 P_1 (1 - P_2) + (v_1 + v_2) P_1 P_2 \\ &= v_1 P_1 (1 - P_2) + (v_1 + v_2) P_1 P_2 \end{aligned}$$

از طرف دیگر اگر او ابتدا سؤال دوم را پاسخ دهد، امید ریاضی میزان جایزه‌ی او مساوی است با:

$$v_2 P_2 (1 - P_1) + (v_1 + v_2) P_1 P_2$$

بنابراین بهتر است شخص ابتدا سؤال اول را انتخاب کند هرگاه

$$v_1 P_1 (1 - P_2) > v_2 P_2 (1 - P_1)$$

یا

$$\frac{v_1 P_1}{1 - P_1} > \frac{v_2 P_2}{1 - P_2}$$

برای مثال اگر او ۶۰ فیصد مطمئن باشد که پاسخ سؤال اول را می‌داند و جایزه آن ۲۰۰ دالر باشد و ۸۰ فیصد در مورد سؤال دوم با جایزه ۱۰۰ دالر مطمئن باشد، او ابتدا باید سؤال ۲ را پاسخ گوید. زیرا:

$$400 = \frac{(100)(0.8)}{0.2} \geq \frac{(200)(0.6)}{0.4} = 300$$

دیده می‌شود که چون:

$$v_1 P_1 (1 - P_2) > v_2 P_2 (1 - P_1)$$

صدق می‌کند. لذا اگر شخص ابتدا به حل سؤال ۱ بپردازد بهتر است. ولی اگر رابطه‌ی

$$v_1 P_1 (1 - P_2) < v_2 P_2 (1 - P_1)$$

صدق کند، در آن صورت باید ابتدا سؤال ۲ را حل کند (۲).

مقدار مورد انتظار پیوسته: مقدار مورد انتظار پیوسته نیز مانند مقدار مورد انتظار گسسته به‌دست می‌آید، فقط با این تفاوت که سمبول جمع به انتگرال تبدیل می‌شود و تابع احتمال p(x) به تابع کثافت f(x) تغییر می‌یابد (۱).

مقدار مورد انتظار متحول تصادفی پیوسته X که با سمبول E(X) نشان داده می‌شود، مساوی است به:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \quad (۴)$$

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx.$$

حالا امید ریاضی به‌دست می‌آید:

$$E(g(x)) = \int_{0}^{1} 9 + 15x^2dx = \left(9 + \frac{15}{4}\right) - \left(9(0) + \frac{0}{4}\right) = \frac{51}{4} = 12.75$$

واریانس: واریانس متحول تصادفی X که اندازه پراکندگی را حول اوسط «امید ریاضی» نشان می‌دهد و آن را با V(x) نشان می‌دهیم، به شکل زیر قابل محاسبه است:

$$V(X) = \sum_{x} (X - \mu)^2 f(x) \quad (۵)$$

یا

$$V(X) = E(X - \mu)^2$$

در این رابطه $\mu = E(x)$ است. با واردکردن بعضی تغییرات، واریانس به‌شکل زیر نیز نوشته می‌شود:

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2$$

زیرا:

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X - \mu)^2 \\ &= E(X^2 - 2X\mu + \mu^2) \\ &= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 \\ &= E(X^2) - 2\mu\mu + \mu^2 \\ &= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \\ &\Rightarrow V(X) = E(X^2) - \mu^2 \end{aligned}$$

و انحراف معیار به‌شکل زیر می‌باشد:

$$SD(x) = \sqrt{V(x)} \quad (٦)$$

سمبول دیگری را نیز برای واریانس X استفاده می‌کنند که عبارت از ${\sigma^2}_x$ است. دراین صورت جذر دوم واریانس که به σ_x نشـان داده می‌شـود عبارت از انحراف معیار متحول تصـادفی X اسـت که انحراف معیار در حل مثال‌ها واضح خواهد شد (۴).

حالا می‌توان نوشت:

$${\sigma^2}_x = E(X^2) - \mu^2$$

واریانس متحول تصادفی گسسته: اگر P(x) توزیع احتمال متحول تصادفی گسسته X با شد، آن‌گاه واریانس به‌شکل زیر تعریف می‌شود:

$${\sigma^2}_x = E(X-\mu)^2 = \sum (X-\mu)^2 P(x) \quad (٧)$$

یا

$${\sigma^2}_x = E(X)^2 - \mu^2 = \sum X^2 P(x) - \mu^2 \quad (٨)$$

واریانس متحول تصـادفی پیوسـته: اگر f(x) تابع کثافت احتمال متحول تصـادفی پیوسـته X باشـد، آنگاه واریانس عبارت است از:

$${\sigma^2}_x = E(X-\mu)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (X-\mu)^2 f(x)dx \quad (٩)$$

یا

$${\sigma^2}_x = E(X)^2 - \mu^2 = \int_{-\infty}^{\infty} X^2 f(x)dx - \mu^2$$

به‌خاطر روشـن شـدن نقش واریانس یا انحراف معیار فرض کنید در یک بازی دو سـکه به شـما داده می‌شود تا پرتاب کنید. بازی طوری است که وقتی سکه را پرتاب می‌کنید در صورت شیر آوردن برنده و در صورت خط آوردن بازنده خواهید شد. بازی را برای حالات زیر ادامه دهید:

الف: در هر بار شیرآمدن سکه دو افغانی برنده و در هر بار خط‌آمدن دو افغانی بازنده خواهید شد؛

ب: در هر بار شیرآمدن سکه ۲۰ افغانی برنده و در هر بار خط‌آمدن ۲۰ افغانی بازنده خواهید شد؛

ج: درهر بار شیرآمدن سکه ۱۰۰ افغانی برنده و در هر بار خط‌آمدن ۱۰۰ افغانی بازنده خواهید شد.

اگر در بازی فوق E_1، E_2 و E_3 به ترتیب امید برد در هر بازی را نشـــان دهند، با محاســـبه اوســـط و واریانس، برد را در هر بازی محاسبه کنید، سپس بگویید که کدام بازی را ترجیح می‌دهید. برای حل، در قدم اول متحول‌های تصادفی X_1، X_2 و X_3 را در جدول مشخص می‌کنیم:

جدول شماره ۱: هر سه بازی ذکر شده را با احتمال برد آن‌ها نشان می‌دهد.

X_1	X_2	X_3	P(x)
-2	-20	-100	1/4
0	0	0	2/4
2	20	100	1/4

حال امید ریاضی هر کدام را محاسبه می‌کنیم:

$$E(X_1) = \sum x_1 P(x_1)$$

$$E(X_1) = (-2)\left(\frac{1}{4}\right) + (0)\left(\frac{2}{4}\right) + (2)\left(\frac{1}{4}\right) = 0$$

$$E(X_2) = \sum x_2 P(x_2)$$

$$E(X_1) = (-20)\left(\frac{1}{4}\right) + (0)\left(\frac{2}{4}\right) + (20)\left(\frac{1}{4}\right) = 0$$

$$E(X_3) = \sum x_3 P(x_3)$$

$$E(X_1) = (-200)\left(\frac{1}{4}\right) + (0)\left(\frac{2}{4}\right) + (200)\left(\frac{1}{4}\right) = 0$$

دیده می شود که امید ریا ضی برای هر کدام از این سه بازی صفر ا ست؛ یعنی اگر شما این بازی را ادامه دهید، نه برنده می‌شـــوید و نه بازنده. این چیزی بود که از امید ریاضـــی دانســـتیم. حال ببینیم با درنظرداشـــت واریانس ادامه بازی را چگونه تحلیل خواهیم کرد. واریانس، ریســـک این ســـه بازی را برای ما واضح می‌سازد. با دانستن این‌که μ درهر بازی صفر است داریم:

$$\sigma^2{}_x = E(X)^2 - \mu^2$$

$$\Rightarrow \sigma^2{}_x = E(X)^2 - 0 = E(X)^2 = \sum x^2 P(x)$$

حال واریانس را برای متحول تصادفی X_1 حساب می‌کنیم:

$$\sigma^2{}_{x_1} = E(X_1)^2 = (4)\left(\frac{1}{4}\right) + (0)\left(\frac{2}{4}\right) + (4)(\frac{1}{4}) = 2$$

واریانس برای متحول تصادفی X_2 عبارت است از:

$$\sigma^2{}_{x_2} = E(X_2)^2 = (400)\left(\frac{1}{4}\right) + (0)\left(\frac{2}{4}\right) + (400)(\frac{1}{4}) = 200$$

هم‌چنان:

$$\sigma^2{}_{x_3} = E(X_3)^2 = (40000)\left(\frac{1}{4}\right) + (0)\left(\frac{2}{4}\right) + (40000)(\frac{1}{4}) = 20000$$

محاسبات بالا مبین واقعیت بسیار مهم است و آن این‌که ریسک در این سه بازی یکسان نیست، در حالی که اوسط یا امید ریاضی آن‌ها کاملاً باهم مساوی‌اند (۳).

واریانس دارای واحد مشخص نیست و مقدار مطلق آن ملاک عمل است؛ اما انحراف معیار که جذر واریانس است، واحد اندازه‌گیری X را داراست. بنابراین اگر بخواهیم با واحد افغانی حرف بزنیم، لازم است که انحراف معیار X_1، X_2 و X_3 را محاسبه کنیم؛ یعنی:

$$\Rightarrow \sigma_{x_1} = \sqrt{2} = 1.4 \,,\ \sigma_{x_2} = \sqrt{200} = 14.1 \,.\ \sigma_{x_3} = \sqrt{20000} = 141.4$$

از دریافت انحراف معیار در روابط بالا دیده می شود که در بازی الف، مقدار برد در هر بار به طور متوسط تقریباً ۱,۴ افغانی زیادتر یا کمتر از اوسط برد است، در حالی که این مقدار برای بازی ب، ۱۴,۱ افغانی و برای بازی ج، ۱۴۱,۴ افغانی است. چون اوسط برد در هر سه بازی یکسان است، معقول‌تر است که بازی «الف» را انتخاب کنیم، مگر این‌که ریسک‌طلب باشیم و بازی «ب» یا این‌که خیلی ریسک‌طلب باشیم تا بازی «ج» را ترجیح دهیم (۳).

نتیجه‌گیری

با بررسی موضوع امید ریاضی و واریانس نتایج زیر را می توان استنتاج نمود:

۱. امید ریاضی نه تنها در بازی‌های چانسی بلکه در بسیاری از بخش‌های از زندگی روزمره کاربرد فرواوان دارد.

۲. امید ریاضی اکثرا اندازه خوشبینی یا دلچسپی ما را در کاری نشان می‌دهد در حالی‌که واریانس از خطر که در این تجربه نهفته است ما را آگاه می‌کند.

۳. بدون واریانس ما هیچ اطلاعی از این که چه ریسکی در یک تجربه نهفته است به‌دست آورده نمی‌توانیم اما با درنظر داشت واریانس می‌توان چالش‌های موجود را بررسی کرد.

٤. تصمیم نهایی در مورد این که یک تجربه ارزش اجرا داشته باشد یا نه بعد از بررسی امید ریاضی و واریانس به‌دست آمده می‌تواند.

منابع

(۱) نوفرستی، محمد. آمار «مفاهیم، روش‌ها و کاربردها» دانشکده علوم اقتصادی و سیاسی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران: ۱۳۸۸.

(۲) رونالدای والپول. مقدمه‌ای بر احتمالات و آمار کاربردی، ترجمه میر بهادر قلی آریانژاد و محمد ذهبون، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران: ۱۳۷۷.

(۳) صدقیانی، جمشید صالحی و شریف‌پور، حسین. آمار و کاربرد آن در مدیریت، اصفهان: ۱۳۸۶.

(4) Sheldon Ross. A first course in Probability. Eighth Edition. 2012.

(5) Robert G. Bartle & Donald R. Sherbert. Introduction to Real Analysis. Third Edition. Eastern Michigan University. 2000.

(6) Aczel-sounderpandian, Complete Business Statistics. 7th Edition McGraw-Hill/ Irwin. 2008.

(7) Susanna S.Epp. Discrete Mathematics with Applications 4th Edition. DePaul University. 2010.

(8) David R. Anderson. University of Cincinnati. Dennis J. Sweeney. University of Cincinnati. Thomas A. Williams, Rochester Institute oof Technology. 2009.

(9) Neil A. Weiss, Ph.D. Elementary Statistics. School of Mathematical & Statistical Sciences Arizona State University, 2009.