مجـلـه‌ی علمی-تحقیقی حـوزه‌ی علوم
طـبیعی پـوهنتــون کــابـل، ۲ (۳) ۱۳۹۹

معادل‌های اصل تغییراتی اکلندگونه در فضای شبه متریکی

پوهنیار سیدنسیم سیاوش[۱۹]
تقریظ‌دهنده: پوهندوی محمدخان حیدری

چکیده

در این مقاله ابتدا مفهوم Q – تابع روی فضـای شـبه متریکی که تعمیم‌دهنده‌ی مفاهیم τ–تابع و ω- فاصـله اسـت، تعریف شـده و بعداً اصـل تغییراتی اکلندگونه در فضـای شـبه متریکی با یک Q – تابع بیان و هم‌چنان شـکل تعادل اصـل تغییراتی اکلندگونه در فضـای شـبه متریکی کامل با یک Q – تابع در نظر گرفته شـده و در ادامه معادل بودن این اصل تغییراتی اکلندگونه با قضیه‌ی نقطه ثابت از نوع کاریستی-کرک برای توابع چندین قیمته، قضــیه‌ی اصغــری‌ســازی تاکهشی و موارد مرتبط دیگــر در فضای شبه متریکی کامل با یک Q – تابع بیان و اثبات شده است.

اصــطلاحات کلیدی: Q – تابع؛ اصــل تغییراتی اکلندگونه؛ قضــیه نقطه ثابت از نوع کاریســتی-کرک؛ قضــیه اصغری سازی تاکهشی؛ فضای شبه متریکی

Equivalences of Ekeland-type variational principle in the setting of quasi-metric spaces

Jr. Teaching Asstt. Syed Nasim Siawash

Abstract

In this paper, first introduced the concept of a Q-function defined on a quasi-metric space. This concept generalizes the notion of a τ-function and a ω-distance. Then we present Ekeland-type variational principles in the setting of quasi-metric spaces with a Q–function, an equilibrium version of the Ekeland-type variational principle in the setting of complete quasi-metric spaces with a Q-function. Also the equivalences of this Ekeland-type variational principles with Caristi–Kirk type fixed point theorems for multivalued maps, the Takahashi minimization theorem and some other related results in the setting of complete quasi-metric spaces with a Q–function, are stated and has been proven.

Keywords: Q–function; Ekeland-type variational principles; Caristi–Kirk type fixed point theorems; Takahashi minimization theorem; and quasi-metric spaces

ارجاع

سیاوش، سیدنسیم. (۱۳۹۹). معادل های اصل تغییراتی اکلندگونه در فضای شبه متریکی. مجله‌ی علمی- تحقیقی حوزه‌ی علوم طبیعی پوهنتون کابل، شماره ۲ (۳)، صص ۱۹۷ – ۲۰۶.

---

[۱] استاد پوهنځی ریاضیات، پوهنتون کابل

مقدمه

اصـل تغییراتی اکلند که در سـال ۱۹۷۲م توسـط اکلند (۵). روی یک فضـای متریکی کامل بیان شـد یکی از نتایج بسیار ا سا سی در آنالیز غیرخطی ا ست که برای حل مسایل زیادی از قبیل بهینه سازی، نظریه‌ی کنترول بهینه، گیم تیوری، سیستم‌های دینامیکی، معادلات غیرخطی و غیره ا ستفاده می شود (۲، ۳، ۵، ٦). این اصـل در حقیقت اصـغری یک تابع نیمه‌پیوسـته‌ی پایینی و از پایین محدود را در مجاورت یک نقطه تقریب می‌زند. نظر به اسـتفاده زیاد این اصـل در بخش های مختلف آنالیز غیرخطی دانشـمندهای زیادی مصروف مطـالعه و تعمیم‌های آن گـردیدند. و نشان دادند که این اصل با قضیه نقطه ثابت کاریستی-کرک، قضـیه اصغـری سازی تاکهشی و بعضی قضایای مشهور دیگر معادل می باشد (۹).

در این مقاله شـکل خاص اصـل تغییراتی اکلند ابتدا در قالب فضـای شـبه متریکی با یک $Q-$ تابع بدون فرض نیمه پیوستگی پایینی برای تابع مورد نظر و بعداً در قالب فضای شبه متریکی کامل با یک $Q-$ تابع بیان شـده اسـت، در ادامه معادل بودن این اصـل تغییراتی با قضـیه نقطه‌ی ثابت از نوع کاریستی کرک برای توابع چندین قیمته، قضیه‌ی ا صغری سازی تاکهشی و بعضی نتایج مرتبط دیگر در فضای شبه متریکی بیان و اثبات شده است.

پیشینه‌ی موضوع

قسمی که در مقدمه ذکر نمودیم، در سال ۱۹۷۲م اکلند یک نتیجه‌ی بسیار مهم را در آنالیز غیرخطی برای تقریب مینیمم یک تابع نیمه پیو سته پایینی و از پایین محدود درمجاورت یک نقطه روی فضای متریکی کامل بیان نمود که فعلاً مشهور به ا صل تغییراتی اکلند ا ست. این ا صل با قضیه نقطه‌ی ثابت کاریستی-کرک، قضیه ا صغری سازی تاکهشی و بعضی قضایای مشهور دیگر معادل می با شد. در سال ۱۹۹٦ کادا وهمکارانش (۷) مفهوم ω- فاصله را روی یک فضای متریکی تعریف نموده و اصل تغییراتی اکلند قضیه‌ی اصغری سازی و قضیه‌ی نقطه ثابت کاریستی _ کرک را برای ω- فاصله تعمیم دادند. سـازوکی (۱۰) مفهوم عمومی‌تر از ω- فاصـله را به‌نام $\tau-$ فاصـله‌ی معرفی و اصـل تغییراتی اکلند را برای $\tau-$ فاصـله‌ی سـاخت و بعداً لین و دو (۸) مفهوم $\tau-$ تابع را تعریف و اصـل تغییراتی اکلند را برای توابع نیمه پیوسته پایینی و از بالا محدود با یک $\tau-$ تابع تعمیم دادند. درین مقاله تعمیم خاصی از اصل تغییراتی اکلند در فضای شبه متریکی و معادل‌های آن به بررسی گرفته شده است در ابتدا بعضی مفاهیم اولیه مورد نیاز را معرفی می‌نماییم.

تعریف: اگر X یک ست غیرخالی باشد آن‌گاه تابع $d: X \times X \to \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ یک شبه متریک روی X گفته می‌شود اگر در شرایط زیر صدق نماید.

$$(M_1) \quad d(x.y) \geq 0 \quad \forall\, x.y \in X$$

$$(M_2) \quad d(x.y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$(M_3) \quad d(x.y) \leq d(x.z) + d(z.y) \quad \forall\; x.y.z \in X$$

یک ست غیرخالی X همراه با یک شبه متریک d به‌نام فضای شبه متریکی یاد شده و به شکل $(X.d)$ نمایش داده می شود. در حقیقت مفهوم فضای شبه متریکی تعمیم از فضای متریکی با برداشتن شرط تناظری است. در فضای شبه متریکی مفاهیم ترادف‌های متقارب، ترادف کوشی وکامل بودن مشابه فضای متریکی تعریف شده می‌توانند. حال مفاهیم $Q-$ تابع، $\tau-$ تابع و $\omega-$ فاصله را معرفی می‌کنیم.

تعریف: تابع $q: X \times X \to \mathbb{R}_+$ یک $Q-$ تابع نامیده می‌شود اگر شرایط زیر را داشته باشد.

$$q(x.z) \leq q(x.y) + q(y.z) \quad \forall\; x.y.z \in X \qquad (Q_1)$$

(Q_2) اگر $x \in X$ و $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ترادف در X باشد که در نقطه $y \in X$ متقارب باشد (نظر به شبه متریک موردنظر) و $q(x.y_n) \leq M$ برای بعضی $M = M_{(x)} > 0$، آن‌گاه $q(x.y) \leq M$.

(Q_3) برای هر $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد $\delta > 0$ طوری که

$$q(x.y) \leq \delta \text{ و } q(x.z) \leq \delta \Longrightarrow d(x.y) \leq \varepsilon$$

تذکر: اگر $(X.d)$ یک فضای متریکی و q به علاوه از شرایط $(Q_3 . Q_2 . Q_1)$ فوق‌الذکر، در شرط زیر نیز صدق کند.

(Q_4) برای هر ترادف $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ در X طوری که $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\{q(x_n . x_m): m > n\} = 0$ و ترادف $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ در X وجود داشته باشد طوری که اگر $\lim\limits_{n\to\infty} q(x_n.y_n) = 0$ آن‌گاه $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n.y_n) = 0$، در آن‌صورت $Q-$ تابع را $\tau-$ تابع می‌نامند.

حال اگر $(X.d)$ یک فضای متریکی و به‌عوض شرط (Q_2) از شرایط بالا شرط زیر را جای‌گزین آن نماییم؛

$(Q_5$ برای هر $x \in X$ تابع $q(x..): X \to \mathbb{R}_+$ یک تابع نیمه پیوسته پایینی باشد. آن‌گاه $Q-$ تابع را ω – فاصله روی X می‌نامند.

لیما زیر بعضی خواص $Q-$ تابع را بیان می کند.

لیما۱. اگر $q: X \times X \to \mathbb{R}_+$ یک $Q-$ تابع روی X و $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ و $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ترادف‌های در X باشند و فرض کنیم که $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ و $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ترادف‌های متقارب به صفر در $\mathbb{R}_+$ باشند آن‌گاه برای $x.y.z \in X$ شرایط زیر برقرار است.

(i) اگر $q(x_n.y) \le \alpha_n$ و $q(x_n.z) \le \beta_n$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ آن‌گاه $y = z$. در حالت خاص اگر $q(x.y) = 0$ و $q(x.z) = 0$ آن‌گاه $y = z$.

(ii) اگر $q(x_n.y_n) \le \alpha_n$ و $q(x_n.y) \le \beta_n$ برای تمام $n \in \mathbb{N}$ آن‌گاه $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متقارب به y است.

(ii) اگر $q(x_n.x_m) \le \alpha_n$ برای تمام $m > n\ ,.m \in \mathbb{N}$ باشد آن‌گاه $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک ترادف کوشی است.

(vi) اگر $q(x.y_n) \le \alpha_n$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ باشد آن‌گاه $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک ترادف کوشی است.

(v) اگر $Q.q_1.q_2.\dots\dots q_n$ – توابع روی X باشند آن‌گاه

$$q(x.y) = \max\{q_1(x.y).q_2(x.y).\dots\dots\dots.q_n(x.y)\}$$

نیز یک $Q-$ تابع روی X است (۱).

تعریف: تابع f را یکنوا پایینی می‌نامند اگر برای هر ترادف $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متقارب به نقطه $x \in X$ که $f(x_{(n+1)}) \le f(x_n)$ باشد آن‌گاه $f(x) \le f(x_n)$ برای هر $n \in \mathbb{N}$

تعریف: تابع $X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$: را از بالا نیمه پیوسته پایینی می‌نامند اگر برای هر ترادف $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ متقارب به نقطه $x \in X$ و $f(x_{(n+1)}) \le f(x_n)$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $f(x) \le \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ (٤).

تذکر: نظر به تعاریف فوق به وضوح دیده می‌شود که هر تابع یکنوا پایینی یک تابع از بالا نیمه پیوسته پایینی است. اما برعکس آن فقط در حالت که f از پایین محدود باشد برقرار است.

تعریف. فرض کنیم X یک فضای مرتب با مرتب سازی $\preccurlyeq$ روی X باشد.

(i) مرتب‌سازی $\preccurlyeq$ روی X را شبه – ترتیب روی X می‌نامند اگر رابطه انعکاسی و انتقالی باشد.

(ii) ترادف $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ در X را نزولی (نظر به $\preccurlyeq$) می‌نامند اگر $x_{n+1} \preccurlyeq x_n$ برای هر $n \in \mathbb{N}$.

(iii) شبه-ترتیب $\preccurlyeq$ روی X را بسته پایینی می‌نامند اگر برای هر $x \in X$ قطعه $S(x) = \{y \in x\ ;\ y \preccurlyeq x\}$ بسته پایینی باشد یعنی اگر $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S_{(x)}$ نزولی نظربه $\preccurlyeq$ ومتقارب به $\bar{x} \in X$ نظر به شبه-متریک روی X باشد آن‌گاه $\bar{x} \in S(x)$.

تعریف: فرض کنیم (X,d) یک فضای شبه متریکی نظر به شبه ترتیب $\preccurlyeq$ روی X باشد برای هر $x \in X$ ست $S(x) = \{y \in X\ ;\ y \preccurlyeq x\}$ را $\preccurlyeq$-کامل می‌نامند اگر هر ترادف کو شی نزولی نظر به $\preccurlyeq$ در $S(x)$ در آن متقارب باشد (۱).

حال دو تعمیم اصل تغییراتی اکلندگونه را در ضمن قضایای زیر بدون اثبات بیان می‌نامیم برای اثبات آن‌ها به (۱) مراجعه کنید.

قضیه۱: فرضاً $(X.d)$ یک فضای شبه متریکی (نه الزاماً کامل)، $q: X \times X \to \mathbb{R}_+$ یک Q-تابع روی X، $\varphi: (-\infty\,.+\infty\,] \to (0\,.\,\infty)$ یک تابع غیر نزولی و $f: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ یک تابع خاص ($\forall\, x \in X.\, dom_{(f)} \neq \emptyset$ و $f_{(x)} > -\infty$) و از پایین محدود باشد شبه ترتیب $\preccurlyeq$ روی X را ذریعه

$$y \preccurlyeq x \quad \text{iff} \quad x = y \quad \text{یا} \quad q(x.y) \leq \varphi(f(x))(f(x) - f(y))$$

تعریف می‌کنیم .فرض کنیم که $\hat{x} \in X$ وجود دا شته با شد طوری‌که $\inf_{x\in X} \quad f(x) < f(\hat{x})$ و $S(\hat{x}) = \{y \in X: y \leq x\}$ $\preccurlyeq$-کامل باشد آن‌گاه $\bar{x} \in X$ موجود است طوری‌که:

$$(a) \quad q(\hat{x}.\bar{x}) \leq \varphi(f(\hat{x}) - f(\bar{x}))$$

$$(b) \quad q(\bar{x}.x) > \varphi(f(\bar{x}))\,(f(\bar{x}) - f(x)) \ \forall\ x \in X \ \ .x \neq \bar{x}$$

قضیه‌ی زیر شکل ساده‌ی قضیه بالا است.

قضیه ۲. اگر $(X\,.\,d)$ یک فضای شبه متریکی کامل $q: X \times X \to \mathbb{R}_+$ یک Q-تابع روی X، $\varphi: (-\infty\,.+\infty\,] \to (0\,.\,\infty)$ یک تابع غیر نزولی و $f: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ یک تابع خاص، از بالا نیمه پیوسته پایینی از پایین محدود باشد فرضاً $\hat{x} \in X$ وجود داشته باشد طوری که $\inf_{x\in X} \quad f(x) < f(\hat{x})$ آن‌گاه $\bar{x} \in X$ موجود است طوری که:

$$(a) \quad q(\hat{x}.\bar{x}) \leq \varphi\big(f(\hat{x}) - f(\bar{x})\big)$$

$$(b) \quad q(\bar{x}.x) > \varphi(f(\bar{x}))\,\big(f(\bar{x}) - f(x)\big) \ \forall\ x \in X \ \ .x \neq \bar{x}$$

بعضی معادل‌ها

حال قضیه‌ی نقطه ثابت از نوع کاریستی-کارک، قضیه‌ی ا صغری سازی و شکل تغییراتی اکلندگونه برای Q- تابع را در فضـــای شـــبه متریکی کامل بیان و ثابت می‌کنیم آن‌ها بین خود و با قضـــیه (۲) معادلند.

قضـــیه۳. اگر $(X.d)$ یک فضـــای شـــبه متریکی کامل $q: X \times X \to \mathbb{R}_+$ یک تابع روی X $\varphi: (-\infty . +\infty\,] \to (0 . \infty\,)$. یک تابع غیر نزولی و $f: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ یک تابع خاص، از بالا نیمه پیوسته پایینی و از پایین محدود باشد آن‌گاه بیانیه‌های زیر باهم و با قضـیه (۲) معادل است (۱).

(i) (**قضـــیه نقطه ثابت از نوع کاریســـتی-کرک**). فرض کنیم $T: X \to 2^X$ یک تابع چندین قیمته‌ی خالی‌قیمت باشد، اگر شرط

$$\forall y \in T(x): \leq \varphi\big(f(x)\big)\big(f(x) - f(y)\big) \qquad (۱)$$

برقرار باشـــد، آن‌گاه T یک نقطه انوریانت در X دارد. یعنی وجود دارد $\bar{x} \in X$ طوری‌که $\{\bar{x}\} = T(\,\bar{x})$ اگر شرط

$$\exists\, y \in T(x): q(x.y) \leq \varphi\big(f(x)\big)\big(f(x) - f(y)\big) \qquad (۲)$$

برقرار باشد آن‌گاه T دارای نقطه ثابت در X است. یعنی وجود دارد $\bar{x} \in X$ طوری که $\bar{x} \in T(\,\bar{x})$

(ii) (**قضیه منیمم سازی تاکه شی**). فرض کنیم که برای هر $\hat{x} \in X$ با $f(\hat{x}) > inf_{z\in X} f(z)$ $x \in X.$ وجود دارد طوری‌که

$$x \neq \hat{x}\,.\;\; q(\hat{x}\,.x) \leq \varphi\big(f(x)\big)\big(f(\hat{x}) - f(x)\big) \qquad (۳)$$

آن‌گاه $\bar{x} \in X$ وجود دارد دارد طوری‌که $f(\bar{x}) = \inf_{y\in X} f(y)$

(iii) (**شکل تعادل ا صل تغییراتی اکلندگونه**). فرض کنیم $F: X \times X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ یک تابع با شرایط زیر باشد.

(E_1) برای هر $x.y.z \in X$ $\qquad F(x.z) \leq F(x.y) + F(y.z)$

(E_2) برای هر نقطه ثابت $x \in X$ تابع $F(x..) : \mathrm{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ یک تابع خاص و از بالا نیمه‌پیوسته پایینی باشد.

(E_3) $\hat{x} \in X$ وجود داشته باشد. طوری‌که $\inf_{x\in \mathrm{X}} \quad F(\hat{x} \,.\, x) \;>\; -\infty$

آن‌گاه $\bar{x} \in X$ وجود دارد طوری که

$$\text{(aa)}\quad \varphi\big(\mathrm{f}(\hat{x})\big)\, F(\hat{x}. x) + \; q(\hat{x}. \bar{x}) \leq 0$$

$$\text{(bb)}\quad \varphi\big(\mathrm{f}(\bar{x})\big)\, F(\bar{x}. x) + q(\bar{x}. x) > 0 \quad \forall \;\; x \in X \,.\, x \neq x$$

اثبات: $(i) \Rightarrow$ ((۲) قضیه) نظر به جز (b) قضیه (۲) $\bar{x} \in X$ وجود دارد طوری که

$$q(\bar{x}. x) > \;\varphi\big(\mathrm{f}(\bar{x})\big)\,(\mathrm{f}(\bar{x}) - \mathrm{f(x)}) \qquad \forall \;\; x \in X \,.\, x \neq \bar{x} \qquad (٤)$$

حکم می‌کنیم که $T(\bar{x}) = \{\bar{x}\}$ (مشابهاً $\bar{x} \;\in T(\bar{x})$).

چون تمام $y \in T(\bar{x}) \subseteq \mathrm{X}$ طوری هستند که $y \neq \bar{x}$ پس نظر به (۱) (مشابهاً نظر به (۲) و (٤) داریم

$$q(\bar{x}. y) \leq \;\varphi\big(\mathrm{f}(\bar{x})\big)\,\big(\mathrm{f}\,(\bar{x}) - \;\mathrm{f}\,(\mathrm{y})\big) \text{ و } q(\bar{\mathrm{x}}. y) \;>\varphi\big(\mathrm{f}(\bar{x})\big)\,(\mathrm{f}\,(\bar{x}) - \;\mathrm{f}\,(\mathrm{y}))$$

که یک تناقض است.

$(\mathrm{i}) \Rightarrow (\mathrm{ii})$: تابع چندین قیمته $\mathrm{T} : \; \mathrm{X} \to 2^{\mathrm{X}}$ را طور زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{T(x)} \;= \{\mathrm{y} \;\in\; \mathrm{X} : \mathrm{q(x.y)} \;\leq\; \varphi(\,\mathrm{f}\,(\mathrm{x}))(\,\mathrm{f}\,(\mathrm{x}) - \;\mathrm{f}\,(\mathrm{y}))\}\,\forall\, \mathrm{x} \;\in\; \mathrm{X}$$

این تابع در (۱) صـــدق کرده و نظر به (i) $\bar{\mathrm{x}} \in \;\mathrm{X}$ وجود دارد طوری که $\mathrm{T}(\bar{\mathrm{x}}) = \{\bar{\mathrm{x}}\}$. نظر به فـــــرض برای تمام $\hat{x} \;\in\; \mathrm{X}$ وجــود دارد $\mathrm{x} \in\; \mathrm{X}$ طوری که $x \neq \hat{x}$ و بناءً $T(\hat{x}) \setminus \{\hat{x}\} \neq \emptyset$ زمانی‌که $\inf_{z\in X} f(z) < f(\hat{x})$ بنابرین داریم:

$$\mathrm{f}\,(\bar{\mathrm{x}}) = \inf_{x\in X} f(x)$$

$(\mathrm{ii}) \Rightarrow (\mathrm{iii})$: تــابــع $f : X \;\to\; R \cup \{+\infty\}$ را ذریـــعه $f\;(x) = F(\hat{x}. x)$ بـــرای تـــمام $\mathrm{x} \in\; \mathrm{X}$ تعــریف می‌کــنیم در حـــالی‌کـــه $\hat{x}$ در شـــرط E_3 صـــدق می‌کـــند پـــس نظـــر به شـــرط E_3. $\inf_{x\in X} f(x) > -\infty$ و بنابرین تابع f از پایین محدود اســـت و با در نظر داشـــت شرط E_2 f تابع خاص و از بالا نیمه‌پیوسته پایینی و از پایین محدود است.

حالا فرض کنیم که (bb) برقرار نباشد پس برای تمام $\mathrm{x} \;\in\; \mathrm{X}$ وجود دارد $\mathrm{y} \in\; \mathrm{X}$ طوری که

$$y \;\neq\; x \;\;.\;\; \varphi(\,f\,(x))\,F(x. y) + q(x. y) \;\leq 0. \qquad (٥)$$

نظر به E_1 داریم :

$$F(\hat{x}.y) - F(\hat{x}.x) \leq F(x.y)$$

پس با در نظرداشت (۵) داریم:

$$\varphi\big(f(x)\big)F(\hat{x}.y) - F(\hat{x}.x) + q(x.y) \leq \varphi(f(x))\,F(x.y) + q(x.y) \leq 0. \quad (٦)$$

یعنی برای هر $x \in X$ وجود دارد $y \in X$ طوری‌که

$$y \neq x \text{ and } \varphi(f(x))(f(y) - f(x)) + q(x.y) \leq 0$$

ویا

$$y \neq x \text{ and } q(x.y) \leq \varphi(f(x))(f(x) - f(y))$$

پس نظر به (ii) $\bar{x} \in X$ وجود دارد طوری که برای تمام $z \in X$ ، $f(\bar{x}) \leq f(z)$ با تعویض x به $\bar{x}$ در (٦) بدست می‌آوریم:

$$\exists\, y \in X : y \neq \bar{x} \text{ and } \varphi(f(\bar{x}))F(\hat{x}.y) - F(\hat{x},\bar{x}) + q(\bar{x}.y) \leq 0.$$

یعنی

$$(f(\bar{x}))(f(y) - f(\bar{x})) + q(\bar{x}.y) \leq 0$$

و یا

$$q(\bar{x}.y) \leq \varphi\big(f(\bar{x})\big)\big(f(\bar{x}) - f(y)\big) \quad (٧)$$

چون $y \neq x$ از لیما ۱ جز (i) می توان گفت که، نه $q(\bar{x}.y) = 0$ و نه $q(\bar{x}.\bar{x}) = 0$ و لذا $q(\bar{x}.y) > 0$.

از (٧) بدست می‌آوریم:

$$\cdot < \varphi(f(\bar{x}))(f(\bar{x}) - f(y)) \Rightarrow f(y) < f(\bar{x})$$

که یک تناقض است.

(قضیه (۲) $\Rightarrow$ (iii)) : تابع $f : X \times X \to R \cup \{+\infty\}$ را به‌صـــورت $F(x.y) = f(y) - f(x)$ برای تمام $x.y \in X$ با $\hat{x} \in \mathrm{dom}(f)$ تعریف می‌کنیم. پس نظر به فرضـــیات F تمام شرایط (iii) را صـــدق می کـــند. بناءً، نظـــر به (iii) , $\bar{x} \in X$ طـــوری وجـــود دارد کـــه (a) و (b) قضـیه (۲) برقرار باشد.

در حالت خاص در جزء (iii) قضیه (۳): اگر $\varphi\big(f(x)\big) = \frac{1}{\varepsilon}$ برای تمام $x \in X$ و هر $\varepsilon > 0$ در نظر بگیریم نتیجه ذیل حاصل می شود (۱):

نتیجه (نسخه تعادل از اصل تغییراتی اکلندگونه).

فرض کنیم $(X.d)$ یک فضـــای شــبه متریکی کامل و $q: X \times X \to \mathbb{R}_+$ یک $Q-$ تابع روی X باشد، فرض می‌کنیم و $F: X \times X \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد که در شرایط زیر صدق کند.

$$F(x.z) \le F(x.y) + F(y.z) \qquad \forall x.y.z \in X.;\ (E_1)$$

(E_2) برای هرنقطه ثابت $x \in X$ تابع $F(x..): X \to \mathbb{R}$ از بالا نیمه پیوســـته پایینی و از پایین محدود باشد دراین صورت برای هر $\varepsilon > 0$ و هر $\hat{x} \in X$ وجود دارد $\bar{x} \in X$ طوری که

$$(aa)\quad F(\hat{x}.\bar{x}) + \varepsilon q(\hat{x}.\bar{x}) \le 0$$

$$(bb)\quad F(\bar{x}.x) + \varepsilon q(\bar{x}.x) > 0 \quad \forall\, x \in X.\ x \ne \bar{x}.$$

نتیجه‌گیری

توسـط اصـل تغییراتی اکلند اصـغری یک تابع نیمه‌پیوسـته‌ی پایینی و از پایین محدود را در مجاورت یک نقطه‌ی تقریب‌زده می‌توانیم این اصل با قضیه‌ی نقطه ثابت کاریستی-کرک، قضیه اصغری‌سازی تاکهشی و بعضی قضایای مشهور دیگر در فضای متریکی معادل می‌باشد. چون مفهوم فضای شبه متریکی تعمیم از فضای متریکی و مفهوم Q - تابع روی فضای شبه متریکی تعمیم از $\tau-$ تابع و ω - فاصله است بناءً، اصل تغییراتی اکلندگونه که ابتدا در قالب فضای شبه متریکی با یک Q - تابع بدون فرض نیمه پیوستگی پایینی برای تابع مورد نظر و بعداً در قالب فضای شبه متریکی کامل با یک Q - تابع بیان شد، تعمیم‌دهنده‌ی آن اصل در فضای شبه متریکی بوده اما بازهم با تعمیم یافته‌های قضایای معادل‌اش، معادل می باشد.

منابع

(1) S. Ansari, Q. H. Al-Homidan, J. C, Yao, Some generalizations of Ekeland-type variational principle with applications to equilibrium problems and fixed point theory, Nonlinear Anal. 2008; 69, pp 126–139.

(2) J.-P. Aubin, H. Frankowska, Set-Valued Analysis, Birkh¨auser, Boston, Basel, Berlin. 1990.

(3) M. Bianchi, G. Kassay, R. Pini, Existence of equilibria via Ekeland's principle, J. Math. Anal. Appl. 2005; 305, PP 502–512.

(4) Y. Chen, Y. J. Cho, L. Yang, Note on the results with lower semi-continuity, Bull. Korean Math. Soc. 2002; 39 (4), PP 535–541.

(5) Ekeland, On the variational principle, J. Math. Anal. Appl. 1974; 47, PP 324–353.

(6) D. G. De Figueiredo, The Ekeland Variational Principle with Applications and Detours, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay. 1989.

(7) O. Kada, T. Suzuki, W.Takahashi, Nonconvex minimization theorems and fixed point theorems in complete metric spaces, Math. Japonica. 1996; 44 (2), PP 381-391.

(8) L.-J. Lin, W.-S. Du, Ekelend's variational principle, minimax theorems and existence of nonconvex equilibria in complete metric spaces, J. Math. Anal. Appl. 2006; 323, PP 360–370.

(9) J.-P. Penot, The drop theorem, the petal theorem and Ekeland's variational principle, Nonlinear Anal. TMA. 1986; 10, PP 813–822.

(10) T. Suzuki: Generalized distance and existence theorems in complete metric spaces, J. Math. Anal. Appl. 2001; 253, PP 440–458.