مجلهٔ علمی-تحقیقی حوزهٔ علوم
طبیعی پوهنتون کابل، ۱ (۳) ۱۳۹۹

قضیه بیز، شگفتی و کاربرد آن

پوهنیار عزیزالله پاینده[۱۷]
تقریظ‌دهنده: پوهاند خالقداد فیروزکوهی

چکیده

در سال (۱۷٦۳م) فیلسوف و ریاضی‌دان انگلیسی به‌نام توماس‌بیز قانون کاربردی و مهمی را بیان کرد که برای دسته‌بندی پدیده‌ها، بر پایهٔ احتمال وقوع یا عدم وقوع یک پدیده استوار است. اگر برای فضای نمونهٔ مفروضی بتوانیم یک انقسام در فضای نمونهٔ S با دانستن این‌که کدام یک از حادثه‌ها رخ داده است انتخاب کنیم، بخش مهمی از عدم اطمینان تقلیل می‌یابد. اهمیت این قانون زمانی آشکار می شود که از طریق آن احتمال یک حادثه را با مشروط‌کردن نسبت به‌وقوع و یا عدم وقوع یک حادثه‌ای دیگر محاسبه کنیم. اکثراً محاسبه احتمال یک حادثه به‌صورت مستقیم مشکل است، در حالی‌که با استفاده از این قضیه و مشروط‌کردن حادثه‌ی مورد نظر نسبت به حادثهٔ دیگر، می‌توان احتمال مورد نظر را به آسانی محاسبه کرد.

اصطلاحات کلیدی: قضیه بیز؛ حادثه‌ها؛ احتمال وقوع؛ فضای نمونه؛ احتمال شرطی؛ انقسام؛ عدم اطمینان

Baye's Theorem, Amazement and its Application

Jr. Teaching Asstt. Azizullah Payendah

Abstract

In probability theory and statistics, Bayes’s theorem (alternatively Bayes’s law or Bayes’s rule) describes the probability of an event, based on prior knowledge of conditions that might be related to the event. For example, if cancer is related to age, then, using Bayes’s theorem, a person’s age can be used to more accurately assess the probability that they have cancer than can be done without knowledge of the person’s age. Bayesian inference is fundamental to Bayesian statistics. Bayes’ theorem is named after Reverend Thomas Bayes (1701-1761), who first used conditional probability to provide an algorithm that uses evidence to calculate limits on an unknown parameter, published as An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances (1763).

Keywords: Bayes’s theorem; Probability; Bayes’s rule; Conditional probability; Bayesian statistics; Alternative; Event

ارجاع

پاینده، عزیزالله. (۱۳۹۹). قضیه بیز، شگفتی و کابرد آن. مجلهٔ علمی-تحقیقی حوزهٔ علوم طبیعی پوهنتون کابل، شمارهٔ ۱ (۳)، صص ۲۰۹ – ۲۱۸.

---

[۱۷] استاد پوهنځی ریاضیات، پوهنتون کابل

مقدمه

یکی از مهم‌ترین دســـت‌آوردها در احتمالات و احصـــائیه عبارت از قضـــیه‌بیز **(Bayes' Theorem)** می‌با شد، این قانون که با ا ستفاده از احتمال شرطی تعریف می شود، قاعده‌ی ا ست که بخش ب سیار مهم و عمده‌ی از دانش بشـــری را در موارد مختلف، و خاصـــتاً در بخش هوش مصـــنوعی، به‌خود اختصــاص داده اســت. پروازهای امن در خطوط‌هوایی، ســیســتم‌های نظارتی و کنترلی شــبکهٔ برق، روبات‌های متحرک، موتورهای جســـت‌جوگر و ده‌ها کاربرد دیگر در زندگی روزمره‌ی ما، بدون این قانون عملاً نمی‌توانستند وجود داشته باشند.

به ا ساس نظریه‌های دانشمندان کمپیوتر ساینس عمده‌ترین معادله‌ی تو صیف‌کنندهٔ هوش، عبارت از قانون بیز می‌باشد، زیرا این قانون بخش بسیار مهم از دانش هوش مصنوعی، که وظیفه‌ی آن توسعه‌ی هوشمندی سیستم‌های کمپیوتری است، بر روی این قانون و احصائیه‌ی بیزی بنا شده است. علاوه بر کاربردهای فراوان این قانون در بخش‌های از دانش کمپیوتری به‌عنوان یک بخش بســیار کاربردی از علم احتمالات، کارایی و ظرافت این قانون بی‌نظیر را می‌توان با یک تحلیل ســاده در زندگی روزمره بیان کرد. قانون بیز در حقیقت یک پل ارتباطی میان حال و گذشـــته اســـت، چیزی که همیشـــه در قضاوت‌ها و تصمیم‌گیری‌های ما مهم است.

به فورمول بیز اگر دقت کنیم رابطه‌ی ریاضی دیده می‌شود که ما در حقیقت در جست‌جوی پیدا کردن احتمال وقوع یک حادثه می‌با شیم. با درنظر دا شت شواهدی که در د ست داریم چنان‌چه از فورمول دیده می شود، محا سبه‌ای این رابطه بر می‌گردد به محا سبهٔ قانون احتمال کل، که بیان می‌کنـــد با چه احتمالی حادثه‌ی مانند x اتفاق می‌افتد، وقوع حادثه α بخش مؤثری دیگریســـت و نیز احتمال وقوع حادثه x به‌شرط این‌که حادثه α اتفاق افتاده باشـد. از توضـیحات بالا نتیجه می‌شـــــود که قانون‌بیز احتمال‌وقوع یک‌حـادثه را به‌سه حـادثه دیگری مربوط می‌سازد که محاسبه آن‌ها آسان‌تر است.

شخصی را تصور کنیـــد که گذشـــته‌ی بد ندارد و گذشـــته‌ی خوب دارد، اما اگر این شـــخص کاری انجام می‌دهد که به‌ظاهر بد اســـت، با احتمال بســـیار زیاد شـــما به این فکر خواهید کرد که احتمالاً حکمتی یا دلیلی داشته است، در غیر این صورت او این کار را انجام نمی‌داد. در این‌جا استدلال شما با درنظر داشت گذشته‌ی نیک این شـــخص چنین بوده، یعنی در اســـتدلال تان اعـــتباری هم به گذشـــتهٔ شخص دادید. توصیف ریاضی این منطق همان قانون بیز است. این قانون قاعـده‌ای اســـت که موازیـنه‌ی بهیـنه بین حـال و گذشـته فـراهم می‌کند. این نیز تأکـید بر برقـراری ارتباط توسـط قانون بیز بین حال و گذشده دارد [۲].

پیشنهٔ تحقیق

قبل از این که در باره قانون بیز بحث نماییم لازم است تا انقسام فضای نمونه و قانون احتمال کل را از نظر بگذرانیم.

انقسام فضای نمونه به چند حادثه

یک انقسام فضای نمونه عبارت است از تقسیم فضای نمونه به حادثه‌هایی که دو به دو ناسازگارند و اتحاد آن‌ها ست فضای نمونه را پوشش می‌دهند.

به عبارت دیگر فرض کنیم حادثه‌های B_1، B_2، . . . ، B_k دوبه‌دو ناسازگار باشند که اتحاد آن‌ها مساوی به ست فضای نمونهٔ S باشد و تقاطع هر جوره از این حادثه‌ها یک ست خالی؛ یعنی:

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = S, B_i \bigcap B_j = \emptyset, \qquad \forall i \neq j$$

در این صورت B_1، B_2، . . . ، B_k را یک انقسام S می‌نامند [۷].

قانون احتمال کل

در حل مسایل احتمالات بعضی اوقات ممکن است به‌مسایلی بر بخوریم که در آن‌ها نتیجهٔ نهایی یک آزمایش تصادفی وابسته است به حادثه‌ی که در مراحل میانی رخ می‌دهد. پس آنچه در مراحل میانی رخ می‌دهد نیز تأثیر بر نتیجه خواهد داشت که نباید از آن صرف نظر کرد. دو حادثه A و B را در نظر بگیریم. می‌توان گفت احتمال حادثه A عبارت است از احتمال تقاطع A و B علاوه بر احتمال تقاطع A و مکملهٔ B [۱].

قانون احتمال کل به شکل زیر است:

$$P(A) = P(A/B) + P(A/\bar{B})$$

ست‌های B و $\overline{B}$ ست‌های فرعی از فضای نمونهٔ S اند، طوری‌که حادثه‌های B یا $\overline{B}$ باید حتماً رخ دهد، و نه هر دوی آن‌ها. قانون احتمال کل را می‌توان برای حالات پیچیده‌تری نیز تعمیم داد؛ یعنی به‌جای دو تا حادثه مانند A و B یک انقسام از حادثه‌ها را که همگی مربوط به فضای نمونهٔ S هستند، می‌توان در نظر گرفت. فرض کنید بتوان ست فضای نمونه را به n ست مانند $B_2, \ldots, B_n$ $B_1,$ انقسام داد، در این حالت می‌توان نوشت:

$$A = A \cap S = A \cap (\cup B_i) = \cup (A \cap B_i)$$

حالا اگر یک انقسـام از این حادثه‌ها را در نظر بگیریم، مانند $A \cap B_1$، $A \cap B_2$، $A \cap B_3$، . . .، $A \cap B_k$ این حادثه‌ها دو به دو ناسازگارند؛ پس داریم:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A \cap B_i)$$

از احتمال شرطی می‌دانیم که:

$$P\left(A / B_i\right) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(B_i)},\ P(B_i) > 0$$

بعد از طرفین و وسطین کردن رابطه بالا، رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$P\left(A \cap B_i\right) = P\left(A / B_i\right) P(B_i)$$

حالا به‌دست می‌آید که:

$$P\left(A\right) = \sum_{i=1}^{k} P\left(A / B_i\right) P(B_i)$$

این قانون به قانون احتمال کل شهرت دارد [۷].

به‌عنوان کاربرد قانون احتمال کل فرض کنیم که یک تحلیل‌گر در مورد بازار سهام باورمند است که به احتمال ۰,۷۵ درصد بازار سهام در سال آینده رشد می‌کند، اگر اقتصاد رشد کند و به احتمال ۰,۳۰ درصد بازار سهام در سال آینده رشد می‌کند، اگر اقتصاد رشد نکند. این تحلیل‌گر معتقد است که با احتمال ۰,۸۰ اقتصاد در سال آینده رشد می‌کند. با چه احتمالی بازار سهام در سال آینده رشد خواهد کرد؟ (با استفاده از تحلیل تحلیل‌گر) [۱۰].

ما U را حادثه‌ی تعریف می‌کنیم که بازار سـهام رشـد کند و W را حادثه‌ی که اقتصـاد رشـد کند. با استفاده از معادله * داریم

$$P\left(A\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(U / W_i\right) P(W_i) = \sum_{i=1}^{2} P\left(U / W_i\right) P(W_i),$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{2} P\left(U / W_i\right) P(W_i) = P\left(U / W\right) P\left(W\right) + P\left(U / \overline{W}\right) P\left(\overline{W}\right),$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{2} P\left(U / W_i\right) P(W_i) = 0.75 \times 0.80 + 0.30 \times 0.20 = 0.66$$

در سال ۱۷٦۳ فیلسوف و ریاضی‌دان انگلیسی به‌نام توماس‌بیز قانون بسیار کاربردی و مهمی را بیان کرد که برای دسته‌بندی پدیده‌ها، بر پایه احتمال وقوع یا عدم وقوع یک پدیده استوار است. اگر برای فضای نمونهٔ مفروضی بتوانیم یک انقسام در فضای نمونهٔ S با دانستن این‌که کدام یک از حادثه‌ها رخ داده است انتخاب کنیم، بخش مهمی از عدم اطمینان تقلیل می‌یابد. اهمیت این قانون زمانی آشکار می شود که از طریق آن احتمال یک حادثه را با مشروط‌کردن نسبت به‌وقوع و یا عدم وقوع یک حادثهٔ دیگر محاسبه کنیم. اکثراً محاسبه احتمال یک حادثه به‌صورت مستقیم مشکل است، در حالی‌که با استفاده از این قضیه و مشروط کردن حادثه مورد نظر نسبت به حادثه دیگر می‌توان احتمال مورد نظر را به آسانی محاسبه کرد [۱۱].

قضیه: اگر B_1، B_2، . . . ، B_k یک انقسام از فضای نمونهٔ S باشند، طوری‌که برای $\mathrm{i} = 1,2,3, \dots, \mathrm{k}$ داشته باشیم:

$P(B_i) \neq 0$. اگر A حادثه‌ی از S باشد که $P(A) \neq 0$، آنگاه برای $\mathrm{k} = 1,2,3, \dots, \mathrm{k}$ خواهیم داشت [٦]:

$$P\left(B_j / A\right) = \frac{P\left(A / B_j\right) P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P\left(A / B_i\right) P(B_i)}$$

ثبوت: از احتمال شرطی داریم:

$$P\left(B_j / A\right) = \frac{P\left(B_j \cap A\right)}{P\left(A\right)}$$

صورت کسر، طبق دستور حاصل ضرب در احتمال شرطی، عبارت است از $P\left(A | B_j\right) P(B_j)$ و مخرج کسر بیان‌گر احتمال کل است و به‌جای آن می‌توان قرار داد [۵]:

$$P\left(B_j / A\right) = \frac{P\left(A / B_j\right) P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P\left(A / B_i\right) P(B_i)}$$

که به آسانی به ثبوت قضیه بیز می‌رسیم [۱۱].

به عنوان کاربرد از قانون بیز می‌توان فرض کنیم یک شرکت تولیدی مواد خام مورد نیاز خود را از دو شرکت دیگر تهیه می‌کند. اگر تعلق مواد خام به شرکت اول و تعلق مواد خام به شرکت دوم را نشان دهد، هم‌چنان ٦۵ فیصد مواد از شرکت اول و ۳٦ فیصد مواد از شرکت دوم خریداری می شود. و نیز

۹۸ فیصد از محصول شرکت اول کیفیت خوب و بقیه کیفیت بد دارند و ۹۵ فیصد محصول شرکت دوم کیفیت خوب و بقیه کیفیت بد دارند. اگر G را حادثه‌ی فرض کنیم که محصول کیفیت خوب داشته باشد و B را حادثهٔ این‌که محصول کیفیت بد داشته باشد، حال اگر یک محصول را به‌طور تصادفی برداریم و این محصول کیفیت بد داشته باشد، دریابید [۸]:

الف: با چه احتمال این محصول مربوط به شرکت اول خواهد بود؟

ب: با چه احتمال این محصول مربوط به شرکت دوم خواهد بود؟

حل: برای حل این سؤال‌ها به معلومات دیگری نیازمندیم که مرحله به مرحله تعقیب می‌کنیم.

می‌دانیم که ۹۸ فیصد تولیدات شرکت اول و ۹۵ فیصد تولیدات شرکت دوم کیفیت خوب دارند و هم‌چنان ۲ فیصد تولیدات شرکت اول و ۵ فیصد تولیدات شرکت دوم کیفیت بد دارند؛ پس داریم:

$$P(G|\ A_1) = 0.98 \text{ و } P(B\ |\ A_1) = 0.02$$

$$P(G|\ A_2) = 0.95 \text{ و } P(B|\ A_2) = 0.05$$

حالا اگر از قانون بیز استفاده کنیم، داریم:

$$P\left(A_1 / B\right) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)}$$

با توجه به دیاگرام درختی داریم:

$$P(A_1 \cap B) = P(A_1)P(B|\ A_1)$$

اگر بخواهیم P(B) را دریافت کنیم، دراین صورت B به‌دو حادثه دیگری مانند $(A_1 \cap B)$ و $(A_2 \cap B)$ وابسته است. از این رو داریم:

$$P(A_1 \cap B) = P(A_1)P(B|\ A_1)$$

الف: اکنون روابط بالا را در نظر می‌گیریم قانون بیز به‌دست آید:

$$P(A_2 / B) = \frac{P(A_2)P(B / A_2)}{P(A_1)P(B / A_1) + P(A_2)P(B / A_2)}$$

حال معادله را محاسبه می‌کنیم

$$P(A_1 / B) = \frac{P(A_1)P(B / A_1)}{P(A_1)P(B / A_1) + P(A_2)P(B / A_2)}$$

$$\frac{(0.65)(0.02)}{(0.65)(0.02) + (0.35)(0.05)} = \frac{0.0130}{0.0130 + 0.175} = \frac{0.0130}{0.0305} = 0.4262$$

ب: حالا نتیجه‌ی معادله را محاسبه می‌کنیم

$$P(A_2/B)=\frac{P(A_2)P(B/A_2)}{P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)}$$
$$=\frac{(0.35)(0.05)}{(0.65)(0.02)+(0.35)(0.05)}=\frac{0.175}{0.0130+0.175}=\frac{0.175}{0.0305}=0.5738$$

یکی از کاربردهایی را که در بخش احتمال کل بیان کردیم، دوباره تکرار می‌کنیم، اما این بار با عبارت متفاو تر [۹].

فرض کنیم یک شرکت تبلیغاتی در حال مطالعه عادات تماشای تلویزیون توسط زن و شوهرها بین ساعت‌های ۸ تا ۱۰ شب است. براساس اطلاعات جمع‌آوری‌شده، شوهرها در ۶۰ فیصد مواقع مشغول تماشای تلویزیون هستند. در عین‌حال مشخص شده است که وقتی شوهرها به‌تماشای تلویزیون م شغول‌اند، در ۴۰ فیصد موارد زن‌ها نیز تلویزیون تما شا می‌کنند. وقتی شوهرها به‌تما شای تلویزیون مشغول نیستند، در ۳۰ فیصد مواقع زن‌ها مشغول تلویزیون تماشاکردن هستند. اگر زن مشغول‌تماشای تلویزیون باشد، دریابید احتمال آن‌که شوهر نیز به‌تماشای تلویزیون مشغول باشد [۵].

حل: اگر حادثهٔ این‌که زن مشغول تماشای تلویزیون باشد را با W و حادثهٔ این‌که شوهر مشغول تماشای تلویزیون باشد را به H نشان دهیم، پس H^c نشان‌دهنده این است که در وقت مورد نظر شوهر مشغول تماشای تلویزیون نیست. پس از قانون احتمال کل داریم:

$$P(W)=0.36$$

حال با تطبیق قانون بیز داریم:

$$P\left(B_j/A\right)=\frac{P\left(A/B_j\right)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P\left(A/B_i\right)P(B_i)}$$

$$P(H/W)=\frac{P(H)P(W/H)}{P(W)}$$

$$P(H/W)=\frac{P(H)P(W/H)}{P(W)}=\frac{(0.40)(0.60)}{0.36}=0.667$$

یعنی ٦٦,٧ فیصد احتمال دارد که در بین ساعت ۸ تا ۱۰ که زن مشغول تماشای تلویزیون است، شوهر نیز تلویزیون تماشا کند [۷].

به عنوان کابرد دیگری از قانون بیز فرض کنید در شـــهری ســـه شرکت تولید لامپ وجود دارد. تولید شرکت x در هفته دو چند تولید شرکت y، و تولید شرکت z در هفته سـه چند تولید شرکت x اسـت. اما از لامپ‌های تولید شده در شرکت x، تولیدات شرکت y و شرکت z به ترتیب ۴ فیصد، ۵ فیصد و ۲ فیصد آن‌ها طول عمر کمتر از یک ماه دارند. اگر همه لامپ‌های مصرفی این شهر توسط این سه شرکت تأمین شـوند، یک لامپ که به‌طور تصـادفی خریده‌ایم و بعداً می‌بینیم که این لامپ طول عمر بیشتر از یک ماه دارد، احتمالات زیر را دریابید [۴].

الف: با چه احتمالی این لامپ مربوط به شرکت x خواهد بود؟

ب: با چه احتمالی این لامپ محصول شرکت y خواهد بود؟

حل: فرض کنید A پشامدی با شد که لامپ خریداری شده طول عمر بیشتر از یک ماه دا شته با شد و هم‌چنان فرض کنیم B_1، B_2 و B_3 به ترتیب حادثه‌هایی باشـــد که لامپ خریداری‌شـــده محصـــول کارخانه‌های x، y و z باشد.

می‌دانیم که تولید شرکت x دو چند تولید شرکت y ا ست؛ یعنی $P(B_1) = 2P(B_2)$ و هم‌چنان تولید شرکت z سه چند تولید شرکت x است؛ یعنی $P(B_3) = 2P(B_1) = 6P(B_2)$. حال داریم:

$$P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = 1$$

$$2P(B_2) + P(B_2) + 6P(B_2) = 1$$

$$9P(B_2) = 1$$

$$P(B_2) = \frac{1}{9}, P(B_1) = \frac{2}{9}, \qquad P(B_3) = \frac{2}{3},$$

چون ۲ فیصـد از تولیدات شرکت x ناقص‌اند، پس ۹۸ فیصـد متباقی سـالم‌اند. از این‌که ۵ فیصـد از تولیدات شرکت y ناقص‌اند، پس ۹۵ فیصـــد آن ســـالم‌اند. هم‌چنان ۴ فیصـــد از تولیدات شرکت z ناقص‌اند، پس ۹۵ فیصد سالم‌اند. با استفاده از قانون احتمال کل، احتمال سالم‌بودن لامپ را به‌دست می‌آوریم و بعداً به سؤالات جواب خواهیم داد.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/B_i)P(B_i) = \sum_{i=1}^{k} P(A/B_i)P(B_i)$$

$$7\, P(A) = P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) + P(A/B_3)P(B_3)$$

$$P(A) = (0.98)\frac{2}{9} + (0.95)\frac{1}{9} + (0.96)\frac{2}{3} = 0.97$$

تقریباً ۹۷ فیصد احتمال دارد که لامپ خریداری‌شده طول عمر بیشتر از یک ماه داشته باشد [۷].

الف: می‌خواهیم بدانیم با چه احتمالی لامپی‌که طول عمر بیشتر از یک‌ماه دارد محصول کارخانه x است.

$$P(B_j / A) = \frac{P(B_j)P(A / B_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_j)P(A / B_j)}$$

$$\Rightarrow P(B_1 / A) = \frac{P(B_1)P(A / B_1)}{P(A)}$$

$$\Rightarrow P(B_1 / A) = \frac{(0.98)\frac{2}{9}}{0.97} = 0.23$$

ب: می‌خواهیم بدانیم با چه احتمالی لامپی‌که طول عمر بیشتر از یک‌ماه دارد محصول کارخانه y است.

$$P(B_2 / A) = \frac{P(B_2)P(A / B_2)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_j)P(A / B_j)}$$

$$\Rightarrow P(B_2 / A) = \frac{P(B_2)P(A / B_2)}{P(A)}$$

$$\Rightarrow P(B_1 / A) = \frac{(0.95)\frac{1}{9}}{0.97} = 0.11$$

نتیجه‌گیری

بعد از بررسی قانون‌بیز نتایج که می‌توان از آن گرفت در زیر لیست گردیده است:

- قانون ارزشمند بیز در حقیقت به‌کمک احتمال شرطی بیان شده می‌تواند؛
- قانون احتمال کل به‌عنوان یک فکتور بسیار مؤثر عمل کرده و به‌شکل بسیار دقیق در محاسبه قانون‌بیز سرعت و دقت می‌آورد؛
- بسیاری از مسایل مهم در بخش‌های از کمپیوترساینس مانند هوش‌مصنوعی و یادگیری ماشین، ضرورت مبرم به قانون‌بیز دارند؛
- از کارایی و استفاده این قانون در زندگی روزمره می‌توان گفت که در حقیقت یک پل ارتباطی میان حال‌وگذشته است، چیزی‌که همیشه در قضاوت‌ها و تصمیم‌گیری‌های ما موضوع بسیار مهم است؛
- یکی از مهم‌ترین دست‌آوردها در احتمالات و احصائیه عبارت از قضیه‌بیز **(Bayes' Theorem)** می‌با شد. این قانون که با ا ستفاده از احتمال شرطی تعریف می شود قاعده‌ای ا ست که بخش بسیار مهم و عمده‌ی از دانش بشری را در موارد مختلف، و خاصتاً در بخش هوش مصنوعی، به‌خود اختصاص داده است.

منابع

[۱]. نوفرستی، محم. (۱۳۸۸). آمار «مفاهیم، روش‌ها و کاربردها». تهران: دانشکده علوم اقتصادی و سیاسی، دانشگاه شهید بهشتی.

[۲]. آذر، عادل و مؤمنی، منصور. (۱۳۸۹). آمار و کاربرد آن در مدیریت. تهران: سازمان مطالعه و تدوین کتب علوم انسانی دانشگاه‌ها.

[۳]. رونالد ای والپول. (۱۳۷۷). مقدمه‌ای بر احتمالات و آمار کاربردی، ترجمهٔ میر بهادر قلی آریانژاد و محمد ذهبون. تهران: دانشگاه علم و صنعت.

[۴]. اعظمی، شاهرود، حاتمی، علی و شجاعی، منوچهر. (۱۳۸۹). متمم آمار ریاضی. اصفهان: انتشارات سپاهان.

[۵]. صدقیانی، جمشید صالحی و شریف‌پور، حسین. (۱۳۸٦). آمار و کاربرد آن در مدیریت. اصفهان، ایران.

[6]. Sheldon Ross. A first course in Probability. Eighth Edition.

[7]. Robert G. Bartle & Donald R. Sherbert. (2000). Introduction to Real Analysis. Third Edation. Eastern Michigan University.

[8]. Aczel- sounderpandian, Complete Business Statistics. 7th Edition McGraw-Hill/Irwin. 2008.

[9]. Susanna S. Epp. (2010). Discrete Mathematics with Applications 4th Edition. Depaul University.

[10]. David R. Anderson. (2009). University of Cincinnati. Dennis J. Sweeney. University of Cincinnati. Thomas A. Williams, Rochester Institute oof Technology.

[11]. Neil A. Weiss. (2009). Ph.D. Elementary Statistics. School of Matheatical & Statistical Sciences Arizona State University.