کاربرد تبـدیل لاپـلاس در حـل معـادلات دیفـرانسـیلی

پوهندوی عـادله مرید[21]
تقریظ‌دهنده: پوهاند خالـقداد فیروزکوهی

مجـلۀ علمی-تحـقیقی حـوزۀ علـوم
طـبیعی پوهـنتون کابل، ۱ (۳) ۱۳۹۹

چکیده

یکی از روش‌های که می‌توان برای یک دســته از معادلات دیفرانســیل که هم‌راه با شرایط اولیه هســتند، جواب‌های را به‌دست آورد با استفاده از روش تبدیلات لاپلاس می‌باشد. به‌وسیلۀ این روش می‌توان بعضی از معادلاتی که شامل توابع غیر متمادی هســتند را نیز حل نمود. در این‌جا قبل از بیان این روش به معرفی تبدیل لاپلاس، خاصـیت خطی‌بودن، شرط لازمی و کافی موجودیت تبدیل لاپلاس، تبدیل معکوس لاپلاس و تبدیل معکوس لاپلاس به‌حیث اپراتورخطی، حل معادلات دیفرانسیل می‌پردازیم. هم‌چنان محاسبه‌ی بعضی از انتیگرال‌ها با استفاده از روش لاپلاس صورت می‌گیرد که در اثر آن، معادلۀ دیفرانســیل به یک معادله الجبری تبدیل و پس از حل آن و گرفتن تبدیل معکوس حل معادله به‌دســت می‌آید. تبدیل انتیگرالی را تبدیل لاپلاس نیز می‌نامند.

اصطلاحات کلیدی: تبدیل لاپلاس؛ انتیگرالی؛ معادلات دیفرانسیل؛ شرایط اولیه؛ اوپراتورخطی

Application of Laplace Transform in Solving Differential Equations

Asstt. Prof. Adela murid

Abstract

One of the methods that can be used for solving differential equations with initial conditions is Laplace transform method. This method can also solve some differential equations involving non-continuous functions. Here, before discussing the method, we introduce the Laplace transform, the property of linearity, the existence of the necessary and sufficient condition, inverse Laplace transform, inverse Laplace transform as linear operator, solving differential equations. Also, some of the integrals are computed using the Laplace method which converts the differential equation into an algebraic equation and after solving it and getting the inverse Laplace transform, the equation is solved. Integral transforms are also called Laplace transforms.

Keywords: Laplace transform; Integral; Differential Equations; Initial conditions; linear operator.

ارجاع

مرید، عادله. (۱۳۹۹). کاربرد تبدیل لاپلاس در حل معادلات دیفرانســیلی. مجــــلۀ علمی-تحقیقی حوزۀ علوم طبیعی پوهنتون کابل، شمارۀ ۱ (۳)، صص ۲۵۱ – ۲۶۲.

---

[21] استاد پوهنځی ریاضیات، پوهنتون کابل

مقدمه

نظریۀ اوپراتورهای خطی مبحث مهم آنالیز فونکسیونال را تشکیل می‌دهد و تبدیل لاپلاس (ترانسفورم لاپلاس) یك نمونه‌ی از اوپراتورهای خطی می‌باشد که با استفاده از آن می‌توان حل خصوصی بسیاری معادلات دیفرانسیل و انتیگرالی را به‌دست آورد. تطبیق ترانسفورم لاپلاس بر یك معادله دیفرانسیل، آن‌را به یك معادله الجبری (معادله کمکی) ارجاع می‌نماید و بعد از حل با درنظر داشت تبدیل معکوس، حل معادله دیفرانسیل به‌دست می‌آید.

اصطلاحات اوپراتور (عمل‌گر)، ترانسفورم، ترانسفارمیشن (تبدیل)، تابع و میپنگ در بسياري موارد با هم‌دیگر معادل اند. تبدیل لاپلاس را به‌طور اغلب اوپراتورلاپلاس و یا ترانسفورم لاپلاس می‌گویند. به‌هر حال ما اصطلاحات «تبدیل» یا ترانسفورم را بیشتر به‌کار می‌بریم. در این مقاله تبدیل لاپلاس و استفاده از آن در حل معادلات دیفرانسیل مطرح می‌گردد.

پیشینۀ موضوع

تبدیل لاپلاس یا ترانسفورم لاپلاس یک نمونه‌ی از اوپراتورهای خطی می‌باشدکه از آن برای دریافت حل خصوصی معادلات دیفرانسیل معمولی و محاسبۀ بعضی از انتیگرال‌ها استفاده به‌عمل می‌آید. در این‌جا تبدیل لاپلاس طور ذیل معرفی می‌گردد [۲]

اگر تابع f در انتروال متناهی یا نامتناهی تعریف شده باشد، برای تابع معین $K(s,t)$ و متحول s اوپراتور انتگرالی $f(t)$ را با علامت $T[f(t)]$ نشان می‌دهیم و قرار ذیل تعریف می‌گردد:

$$T[f(t)] = \int_a^b K(s,t) f(t) dt \ , \ a, b \in (-\infty, \infty) \qquad (1)$$

که در آن $K(s,t)$ را هسته اوپراتور T می‌نامیم.

هرگاه در اوپراتور انتیگرالی فوق $K(s,t) = e^{-st}$ برای $[0, \infty)$ درنظر گرفته شود، در این صورت اوپراتور انتیگرالی را با $L[f(t)]$ یا $L[f]$ نشان می‌دهیم و آن‌را تبدیل (ترانسفورم) لاپلاس $f(t)$ می‌گویند. پس

$$L[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{-st} f(t) dt \qquad (2)$$

واضح است که $L[f(t)] = F(s)$ یك تابع از متحول حقیقی s می‌باشد. ناحیه تعریف F مجموع s های است که برای آن‌ها انتیگرال داده شده متقارب باشد به عبارت دیگر لیمیت مربوط در آن موجود گردد.

طرح موضوع

اگر $L[f\ (t)] = F\left(s\right)$ ، در آن‌صورت $L[f\,(\alpha\,t)] = \left(1/\alpha\right) F\left(s/\alpha\right)$

برعکس هرگاه $L^{-1}\left[F(s)\right] = f\ (t)$ ، پس $L^{-1}\left[\ F\left(s/\alpha\right)\right] = \alpha\, f(\alpha t)$

نظر به تعریف تبدیل لاپلاس و با تعویض متحول، داریم:

$$L[f\,(\alpha\,t)] = \int_0^\infty e^{-s\,t}\, f\,(\alpha\,t)\,dt = \begin{bmatrix} u = \alpha\,t \\ du = \alpha\,dt \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{\alpha}u}\, f(u)\,d\,u = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right) \qquad (3)$$

تبـدیل لاپلاس بعضـی توابع معمـولی را می‌توان با اسـتفاده از تعـریف تبـدیل لاپلاس به‌دسـت آورد، در جــدول ذیل مرتب شــده اند که در تحلــیل مســایل و حل معــادلات دیفرانسیل از آن اســتفاده به‌عمـل می‌آید.

جدول ۱: تبدیل لاپلاس بعضی توابع کاربردی [۳].

$f\ (t)$	$F(s)$	$D(F)$	$f\ (t)$	$F(s)$	$D(F)$
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$	t^n	$\frac{n\,!}{s^{\,n+1}}$	$s > 0$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$s > 0$	$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$s > 0$
$\sin h\,at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$s > \lvert a \rvert$	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$s > \lvert a \rvert$
e^{at}	$1/(s-a)$	$s > a$	$f\ (\alpha t)$	$(1/\alpha)(s/\alpha)$	$s > a$

تبدیل لاپلاس به حیث اوپرتورخطی

تبدیل لاپلاس، یك اوپراتور خطی است، یعنی:

$$L[f_1 + f_2] = L[f_1] + L[f_2] \quad , \quad L[c\ f] = cL[f]$$

خطی بودن تبدیل لاپلاس معادل به‌رابطه ذیل می‌باشد:

$$L[c_1 f_1 + c_2 f_2] = c_1 L[f_1] + c_2 L[f_2]$$

با درنظرداشـــت این که تبدیل لاپلاس یك اوپراتورخطی اســـت، این تبدیل را برای مجموع چند تابع می‌توان محاسبه نمود.

موجودیت تبدیل لاپلاس

دریافت تبدیل لاپلاس براي بعضـی توابع معمولی سـاده اسـت. سـؤالی مطرح می‌گردد که کدام نوع توابع، دارای تبدیل لاپلاس می‌باشـند؟ جواب قطعی این سـؤال دشـوار اسـت و ما یك دسـته توابع را مشـخص می‌نماییم که تبدیل لاپلاس آن‌ها قابل ارائه هسـتند. طبـعاً وجود این تبدیل مسـتلزم کنجـکاوی انتگرال غیـر عادي مربوط اوپراتور می‌باشد. یعنی تحـت چه شـرایطی این انتیگـرال وجود داشته می‌تواند؟ [۱]

$$L[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \qquad (4)$$

تـوابع با مراتـب نـمائی. تابع f ازمرتبه نمایی گفـته می‌شـود. اگر ثابـت‌های α و M وجـود داشـته باشـند طـوری که:

$$\left|f\ (t)\right| \le M\ e^{\alpha t}\ ,\ \ t > 0$$

یعنی وقتی که t به بی‌نهایت تقرب مي‌کند، رشد $f(t)$ کُندتر از مضربی یک تابع نمائی است. هر تابع محدود و هر تابع پولینومیل از مرتبه نمایی می‌باشد.

به‌طور مثال $f\ (t) = 10\,e^{7t}\cos 5t$ از مرتبه نمائي است، زیرا:

$$\left|f(t)\right| = \left|10e^{7t}\cos 5t\right| \le 10e^{7t}\left|\cos 5t\right| \le 10e^{7t} \qquad (5)$$

شرایط کافی وجود تبدیل لاپلاس. هرگاه $f(t)$ در انتروال $[0,\infty)$، زینه‌ای متمادی و از مرتبه نمایی باشد. یعنی:

$$\left|f\ (t)\right| \le M\ e^{\alpha t}\ ,\ t \ge 0$$

در آن‌صـورت $L[f\ ]$ برای $s > \alpha$ موجود اسـت. شرایطی که در این‌جا بیان گردید، کافی بوده و لازمي نیسـتند. به‌طور مثال تابع $f\ (t) = t^{-1/2}$ شرایط اخیر را ندارد زیرا $\lim_{t\to 0^+} f(t) = +\infty$ اما می‌توان نشان‌داد که $L[f\ ]$ قرار ذیل وجود دارد:

$$L[t^{-1/2}] = \int_0^\infty e^{-st}t^{-1/2}dt = \lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-st}t^{-1/2}dt = \lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-u}(u/s)^{-1/2}du/s$$
$$= \int_0^\infty e^{-u}u^{-1/2}(s^{1/2}s^{-1})du = s^{-1/2}\int_0^\infty u^{-1/2}e^{-u}du = s^{-1/2}\,\Gamma(1/2) = \left(1/\sqrt{s}\right)\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi/s}$$

دراین جا از $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ استفاده شده است.

شرط لازمی وجود تبدیل لاپلاس. فرض کنیم $f(t)$ در انتروال $[0,\infty)$ زمینه‌ای متمادی و از مرتبه نمایی باشد، براي $L[f(t)]=F(s)$ داریم:

$$\lim_{s\to\infty} L[f(t)] = \lim_{s\to\infty} F(s) = 0 \qquad (6)$$

طور مثال هیچ تابعی وجود ندارد که اوپراتور لاپلاس آن عبارت از تابع $F(s)=\dfrac{s^2}{s^2+1}$ باشـــد. زیرا: $\lim_{S\to\infty} F(s) = 1 \neq 0$ و مطابق شرط لازمی وجود یك تابع مطلوب منتفی است.

تبدیل معکوس لاپلاس. فرض کنید تبدیل لاپلاس f موجود و مساوی به F باشد، یعنی:

$$L[f(t)] = F(s) \qquad (7)$$

دراین صورت f را تبدیل معکوس F می‌نامیم و می‌نویسیم:

$$f(t) = L^{-1}[F(s)]$$

به عبارت دیگر:

$$L^{-1}[F(s)] = f(t) \Leftrightarrow L[f(t)] = F(s)$$

توجه کنید که در رابطه اخیر تابع (F) یکتا است زیرا L در واقع یک تابع است. اما اگر $F(s)$ تابع مفروض و $f(t)$ تابعی باشد که $L[f(t)]=F(s)$، در آن‌صورت لزوماً $f(t)$ یکتا نیست.

قابل یادآوری اســـت که اگر f و g توابع متمادی زمینه‌ای در انتروال $[0,\infty)$ باشـــند، طوری‌که تبدیل لاپلاس آن‌ها موجود و $L[f(t)]=L[g(t)]$، در آن‌صـــورت در هر نقطه t که f و g پیوسته باشند $f(t)=g(t)$ ازین نتیجه می شود که اگر $f(t)$ متمادی بوده $f(t)=L^{-1}[F(s)]$ پس $f(t)$ یکتاست [۴]

تبدیل معکوس لاپلاس بحیث اپراتورخطی

تبدیل معکوس لاپلاس یك اوپراتور خطي اســـت ، یعني براي توابع F_1 و F_2 از ناحیه قیمت‌هاي L^{-1} و تمام اعداد ثابت c_1 و c_2 داریم:

$$L^{-1}[c_1F_1 + c_2F_2] = c_1L^{-1}[F_1] + c_2L^{-1}[F_2] \qquad (8)$$

ثبوت

با درنظرداشـــت این که $L[f_1]=F_1 \Leftrightarrow f_1=L^{-1}[F_1]$ ، $L[f_2]=F_2 \Leftrightarrow f_2=L^{-1}[F_2]$
و خطي بودن اوپراتور Lمي توانيم بنويسيم:

$$c_1L[f_1]+c_2L[f_2]=L[c_1f_1+c_2f_2] \Rightarrow L^{-1}\left[c_1L[f_1]+c_2L[f_2]\right]=L^{-1}L[c_1f_1+c_2f_2]$$
$$\Rightarrow L^{-1}\left[c_1F_1+c_2F_2\right]=c_1f_1+c_2f_2 \Rightarrow L^{-1}\left[c_1F_1+c_2F_2\right]=c_1L^{-1}[F_1]+c_2L^{-1}[F_2]$$

تبدیل لاپلاس مشتق تابع

فرض کنید fدر انتروال $[0\ ,\ \infty)$ از مرتبه نمایی بوده ، $f'(t)$ در $[0\ ,\ \infty)$ وجود دا شته متمادی قطعه ای باشد. تبدیل لاپلاس آن عبارت است از:

$$L[f']=sL[f]-f(0).$$

ثبوت

چون f از مرتبه نمایی و مشتق‌پذیر می‌باشد، لذا تبدیل لاپلاس آن وجود دارد و داریم:

$$L[f']=\int_0^{\infty}e^{-st}f'(t)dt=\left[e^{-st}f(t)\right]_0^{\infty}+s\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)dt=sL[f(t)]-f(0)$$

تبدیل لاپلاس مشتقات مرا تب عالی

قاعده قبل را برای مشـــتقات مراتب بالاترنیز می‌توان به‌کار برد. اگر f' و f'' در شرایط قضـــیه قبل صدق کنند داریم:

$$L[f'']=sL[f']-f'(0)=s\left[sL[f]-f(0)\right]-f'(0)=s^2L[f]-sf(0)-f'(0)$$

بنابراین،

$$L[f'']=s^2L[f]-f(0)-f'(0) \qquad (9)$$

با ادامه متواتر روش می یابیم که:

$$\begin{aligned}L[f^{(n)}]&=s^nL[f]-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)\\&-\ldots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)\end{aligned} \qquad (10)$$

کاربرد تبدیل لاپلاس در حل معادلات دیفرانسیل

تبدیل لاپلاس وسیلۀ مناسبی برای حل بعضی معادلات دیفرانسیل با شرایط اولیه می‌باشد. این روش طی مراحل ذیل به اختصار ارائه می‌گردد:

اول: تبدیل لاپلاس اطراف معادله دیفرانسیل را گرفته شرایط اولیه را در آن تعویض مي‌كنيم، كه از آن يك معادله الجبری (معادله مشخصه) به‌دست مي‌آيد.

دوم: معادله مشخصه را برای $Y(s)$ (تبدیل لاپلاس تابع مطلوب $y(t)$) حل می‌نمائیم.

سوم: معکوس تبدیل لاپلاس را از رابطۀ نهایی، دریافت کرده از آن حل $y(t)$ به‌دست می‌آید [۵]

با توجه به‌تبدیل لاپلاس و شرایط اولیه $y(0)=1$, $y'(0)=2$ می‌توان معادله دیفرانسیل $y''-y'-6y=0$ را به‌صورت زیرحل نمود:

حل: ابتدا تبدیل اطراف معادله را دریافت می نماییم

$$L[y''-y'-6y]=0 \Rightarrow L[y'']-L[y']-6L[y]=0$$

از این‌جا

$$[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]-[sY(s)-y(0)]-6Y(s)=0$$

با تعويض مفاهيم رابطه اخير مي يابيم كه

$$[s^2Y(s)-s-2]-[sY(s)-1]-6Y(s)=0 \Rightarrow (s^2-s-6)Y(s)=s+1$$

با حل معادله مشخصه داریم:

$$Y(s)=\frac{s+1}{s^2-s-6}=\frac{s+1}{(s-3)(s+2)}=\frac{4}{5(s-3)}+\frac{1}{5(s+2)}$$

یعنی

$$Y(s)=\frac{4}{5(s-3)}+\frac{1}{5(s+2)}$$

غرض تعیین حل مطلوب، تبدیل معکوس لاپلاس این رابطه را تطبیق می‌کنیم [۷].

$$\underbrace{L^{-1}[Y(s)]}_{y(t)}=L^{-1}\left[\frac{4}{5(s-3)}+\frac{1}{5(s+2)}\right]=L^{-1}\left[\frac{4}{5(s-3)}\right]+L^{-1}\left[\frac{1}{5(s+2)}\right]$$

$$=\frac{4}{5}L^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right]+\frac{1}{5}L^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]=\frac{4}{5}e^{3t}+\frac{1}{5}e^{-2t}$$

در نتیجه حل معادله عبارت است از:

$$y(t)=\frac{4}{5}e^{3t}+\frac{1}{5}e^{-2t}$$

مشتق و انتگرال تبدیل لاپلاس

اگر $f(t)$ تابعی دارای تبدیل لاپلاس باشد، در آن صورت

$$L[t^n f(t)]=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}L[f(t)]$$

ثبوت

مشتق nام تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ را دریافت مي کنیم.

$$\frac{d^n}{ds^n}L[f(t)]=\frac{d^n}{ds^n}\int_0^\infty e^{-ts}f(t)dt=\int_0^\infty\left(\frac{d^n}{ds^n}e^{-ts}\right)f(t)dt$$
$$=(-1)^n\int_0^\infty e^{-ts}t^n f(t)dt=(-1)^n L[t^n f(t)]$$

از این‌جا به‌دست می‌آید که:

$$L[t^n f(t)]=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}L[f(t)]$$

نتیجه

$$I.\ L[t\sin(\alpha t)]=\frac{2\alpha s}{(s^2+\alpha^2)^2}\ ,\ II.\ L[t\cos(\alpha t)]=\frac{s^2-\alpha^2}{(s^2+\alpha^2)^2}\ ,\ III.\ L[t^n e^{\alpha t}]=\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$$

ثبوت

$$I.\ L[t\sin(\alpha t)]=(-1)\frac{d}{ds}L[\sin(\alpha t)]=(-1)\frac{d}{ds}\left(\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}\right)=\frac{2\alpha s}{(s^2+\alpha^2)^2}\ ,$$

$$II.\ L[t\cos(\alpha t)]=(-1)\frac{d}{ds}L[\cos(\alpha t)]=(-1)\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+\alpha^2}\right)=\frac{s^2-\alpha^2}{(s^2+\alpha^2)^2}\ ,$$

$$III.\ L[t^n e^{\alpha t}]=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}L[e^{\alpha t}]=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s-\alpha}\right)=\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$$

انتگرال تبدیل لاپلاس. هرگاه $L[f(t)]=F(s)$ و $\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{f(t)}{t}\right)$ وجود داشـــته باشـــد، پس تبدیل لاپلاس تابع $\dfrac{f(t)}{t}$ عبارت است از:

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_s^\infty F(u)\,du\ .$$

ثبوت: با درنظر داشت مشتق تبدیل لاپلاس می‌توان نوشت.

$$F(s)=L\left[f(t)\right]=L\left[t\,\frac{f(t)}{t}\right]=-\frac{d}{ds}L\left[\frac{f(t)}{t}\right]\Rightarrow-\frac{d}{ds}L\left[\frac{f(t)}{t}\right]=F(s)$$

$$\Rightarrow L\left[\frac{f(t)}{t}\right]=-\int_\infty^s F(u)\,du=\int_s^\infty F(u)\,du$$

حال با توجه به انتیگرال تبدیل لاپلاس نشان می‌دهیم که:

$$\int_0^\infty \frac{du}{1+u^2}=\frac{\pi}{2}$$

حل: با استفاده از انتیگرال‌های اساسی داریم:

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+u^2}\,du=\lim_{s\to 0}\int_s^\infty \frac{1}{1+u^2}\,du=\lim_{s\to 0}\left[\frac{\pi}{2}-\arctan(s)\right]=\frac{\pi}{2}-\underbrace{\arctan(0)}_{0}=\frac{\pi}{2}$$

نتیجه: هرگاه انتیگرال تبدیل لاپلاس در حالت $s\to\overset{+}{0}$، متقارب باشند، پس:

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}=\int_0^\infty F(s)ds$$

ثبوت: مطابق تعریف تبدیل لاپلاس براي $\dfrac{f(t)}{t}$ مي‌توان نوشت [٦].

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_s^\infty F(u)\,du\Rightarrow\int_s^\infty e^{-st}\frac{f(t)}{t}dt=\int_s^\infty F(u)\,du$$

$$\Rightarrow\lim_{s\to 0}\left[\int_s^\infty e^{-st}\frac{f(t)}{t}dt\right]=\lim_{s\to 0}\left[\int_s^\infty F(u)\,du\right]$$

$$\Rightarrow\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt=\int_0^\infty F(u)\,du\Rightarrow\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt=\int_0^\infty F(s)\,ds$$

محاسبه بعضی انتیگرال‌ها با کاربرد تبدیل لاپلاس

بعضی انتیگرال‌های غیرعادی را می‌توان با کاربرد ترانسفارم لاپلاس و خواص آن محاسبه نمود. در این‌جا از یک خاصیت مهم ترانسفورم متذکره استفاده به‌عمل می‌آید.

با درنظر داشت $L[f(t)] = F(s)$ و تعریف ترانسفورم لاپلاس داریم:

$$\int_s^{\infty} e^{-st} f(t) dt = F(s)$$

اگر $s \to 0$ در آن صورت:

$$\int_0^{\infty} f(t) dt = F(0)$$

این رابطه در انتیگرال‌گیری مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این جا با درنظر داشت تبدیل لاپلاس انتیگرال‌های $\int_0^{\infty} t e^{-st} \cos(t)\, dt$ و $\int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t} dt$ را محاسبه می‌کنیم.

حل: با توجه به‌دساتیر داریم [۸].

$$\int_0^{\infty} t e^{-st} \cos(t)\, dt = L[t\cos(t)] = -\frac{d}{ds} L[\cos(t)] = \frac{s^2 - 1}{(s^2+1)^2}$$

به‌همین قسم با درنظر داشت (انتیگرال تبدیل لاپلاس) می‌توان نوشت:

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{\infty} F(u)\, du \Rightarrow L\left[\frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t}\right] = \ln\left(\frac{s+3}{s+1}\right)$$

از این‌جا داریم که:

$$\int_s^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t} dt = \ln\left(\frac{s+3}{s+2}\right) \Rightarrow \lim_{s\to 0}\left(\int_s^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t} dt\right) = \lim_{s\to 0}\left(\ln\frac{s+3}{s+1}\right)$$

بنابراین، با توجه به لیمت فوق چنین نتیجه می‌گیریم:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t} dt = \ln 3 \quad ،$$

هم‌چنین می‌توان انتیگرال $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ را با به‌کاربردن تبدیل لاپلاس محاسبه کرد.

حل: با درنظر داشت $\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{\infty} F(s) ds$ و $L[\sin t] = \frac{1}{1+s^2} = F(s)$ می‌توان نوشت که

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{\infty} F(s) ds \overset{F(s)=L[\sin t]}{=} \int_0^{\infty} \frac{ds}{1+s^2} = \frac{\pi}{2} .$$

نتیجه‌گیری

- تبدیل لاپلاس یک نمونه‌ای از اوپراتورها به‌شمار می‌رود.

- تبدیل (ترانسفورم) لاپلاس می‌تواند به‌حیث اوپراتور خطی عمل کند. یعنی:

$$L[c_1 f_1 + c_2 f_2] = c_1 L[f_1] + c_2 L[f_2]$$ ○

- اگر $F(s)$ تبدیل لاپلاس $f(t)$ باشد دراین صـــورت تابع $f(t)$ را تبدیل معکوس $F(s)$ می‌نامند.

- معکوس تبدیل لاپلاس خاصیت خطی بودن را دارا می‌باشد. یعنی:

$$L^{-1}[c_1 F_1 + c_2 F_2] = c_1 L^{-1}[F_1] + c_2 L^{-1}[F_2]$$ ○

- معادلات دیفرانسیل را می‌توان با استفاده از تبدیل لاپلاس حل نمود.

- محاسبه بعضی از انتیگرال‌ها را می‌توان به‌کمک تبدیل لاپلاس انجام داد.

منابع

[۱]. اسماعیل، حسام‌الدینی و صالحی، محمدرضا. (۱۳۸۲). معادلات دیفرانسیل مقدماتی. مرکز نشر دانشگاه شیراز. صص 122 – 134.

[۲]. کرایه‌چیان، دکتر اصغر. (۱۳۸۳). معادلات دیفرانسیل وکاربرد آن. مشهد: انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد. صص ۲۶۰ - ۲۷۲

[۳]. غوری، محمدانور و مرید، عادله. (۱۳۹۶). معادلات دیفرانسیل معمولی. کابل: انتشارات سعید. صص ۱۹۵ – ۲۰۰.

[۴]. عرفانیان، احمد و اورعی، سیدحسین. (۱۳۹۵). معادلات دیفرانسیل همراه با پاسخ تمرینات. مشهد: انتشارات دانشگاه مشهد، صص ۲۴۱ - ۲۵۲.

[5]. Erwin Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 9th edition, Ohio state

[6]. University, John Wiley and Sons, INC, (2006) pp 402 - 410.

[7]. Piskunov N. (1981) Differential and Integral Calculus, Mir, Moscow. pp 450 - 452.

[8]. Richard Bronson, (1993) Differential Equations, Shum’s Outline series, New York. pp 510 - 515.

[9]. Stephen, W. Goode (1991) Differential Equations and Linear Algebra, Prentice Hall, New Jersey. pp 468 - 485.